Streszczenie pracy doktorskiej: Własności asymptotyczne oraz własności Szegö dla wybranych klas operatorów ograniczonych

Patryk Pagacz

30 czerwca 2014

Asymptotyka orbit operatorów ograniczonych na przestrzeniach Hilberta jest pojęciem często badanym zarówno z uwagi na samą Teorię Operatorów jak i na jej zastosowania w innych dziedzinach matematyki. Niniejsza rozprawa skupia się na dwóch aspektach asymptotyki operatorów ograniczonych rozumianej zgodnie z poniższą definicją.

Definicja 1.0.1. *Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywamy*

- *operatorem* klasy $C_{0\cdot}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T^n x\| = 0$, *dla dowolnego* $x \in \mathcal{H}$,
- *operatorem* klasy $C_{1\cdot}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T^n x\| > 0$, *dla dowolnego niezerowego* $x \in \mathcal{H}$,
- *operatorem* klasy $C_{\cdot 0}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* T^* *jest klasy* $C_{0\cdot}$,
- *operatorem* klasy $C_{\cdot 1}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* T^* *jest klasy* $C_{1\cdot}$.

Dodatkowo dla $i, j \in \{0, 1\}$, *operator* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *klas* $C_{\cdot j}$ *i* $C_{i\cdot}$ *nazywamy operatorem* klasy C_{ij}.

Pierwszym z nich jest rozwinięcie idei Putnama z 1975 roku. Putnam pokazał, że zupełnie nieunitarna część hiponormalnej kontrakcji jest klasy $C_{\cdot 0}$. W ten sposób rozpoczęto badanie warunków normowych implikujących silną stabilność danej kontrakcji lub jej sprzężenia. Już w roku 1977 Okubo pokazał, że wynik ten można rozszerzyć na paranormalne kontrakcje. Następnie Duggal oraz Kubrusly przenieśli wynik Putnama na szereg innych klas kontrakcji niekoniecznie normalnych (k-paranormalnych, $(p,1)$-quasihiponormalnyh, $(1,k)$-quasihiponormalnych). W rozprawie przedstawiono dalsze uogólnienia wyniku Putnama, m. in. na klasę n-hiperkontrakcji oraz (p,k)-quasinormalnych kontrakcji. Jednak głównym celem pierwszego rozdziału rozprawy nie jest rozszerzenie wyniku Putnama na kolejne klasy kontrakcji, ale podanie kryterium, które pozwala na prostą weryfikację asymptotyki danej klasy operatorów. Narzędziem pozwalającym na skuteczą weryfikację warunków normowych definiujących klasy operatorów jest pojęcie tzw. ciągów wstecznych.

Definicja 2.2.1. *Dla danego operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ nazywamy* ciągiem wstecznym *(względem T) wtedy i tylko wtedy, gdy $Tx_{n+1} = x_n$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

Dodatkowo, jeżeli rozważany ciąg jest ograniczony, to nazwiemy go ograniczonym ciągiem wstecznym.

Wspomniane powyżej narzędzie można przedstawić w formie następującego kryterium.

Twierdzenie 2.4.1. *Niech $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie kontrakcją. Następujące warunki są równoważne:*

- *dla każdego ograniczonego ciągu wstecznego $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ względem T, ciąg jego norm $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest stały,*
- *zupełnie nieunitarna część operatora T jest kontrakcją klasy $C_{\cdot 0}$.*

□

Wynik ten został poprzedzony ogólniejszym rezultatem przedstawiającym charakteryzację operatorów potęgowo ograniczonych, które nie posiadają nie stałego ograniczonego ciągu wstecznego. Rezultat ten jest odpowiedzią na pytanie Pana prof. dr. hab. Jaroslava Zemanka. W celu rozszerzenia kryterium na operatory potęgowo ograniczone posłużono się konstrukcją asymptoty izometrycznej pochodzącą od Szökefalvi-Nagya, rozwiniętą dalej przez Kérchy'ego.

Część rozważań stojąca u podstaw wykorzystania ciągów wstecznych w przypadku operatorów potęgowo ograniczonych ma swój odpowiednik dla ograniczonych ciągłych półgrup operatorów na przestrzeni Banacha. Ciągłym odpowiednikiem pojęcia ciągów wstecznych są tzw. zupełne trajektorie. Dzięki uwagom Pana prof. dr. hab. Yuria Tomilova fakt ten nie pozostał pominięty.

Ostatnim akcentem pierwszego rozdziału jest odniesienie uzyskanych rezultatów do ogólnego przypadku operatorów ograniczonych, niekoniecznie potęgowo ograniczonych. Własność zbieżności orbit do zera została zastąpiona słabszym warunkiem(równoważnym w przypadku operatorów potęgowo ograniczonych), tzw. własnością Putnama-Fuglede.

Definicja 2.6.1. *Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ma* własność przemienności Putnama-Fuglede *(w skrócie* własność PF*) wtedy i tylko wtedy, gdy równość $T^*X = XJ$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ oraz dla wszystkich izometrii $J \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takich, że $TX = XJ^*$.*

Z uwagi na brak narzędzi odpowiadających asymptocie izometrycznej własności Putnama-Fuglede dla wcześniej rozpatrywanych klas operatorów została zweryfikowana osobno dla każdej z wcześniej rozpatrywanych klas.

Między innymi ponownie wykorzystując technikę ciągów wstecznych pokazane zostało, że operatory k^*-paranormalne posiadają własność Putnama-Fuglede. Jednak najważniejszym rezultatem uzyskanym na zakończenie pierwszego rozdziału jest przykład operatora paranormalnego nieposiadającego wspomnianej własności. Przykład ten przedstawia operator paranormalny S oraz operator unitarny U takie, że zachodzi równość $SX = XU$ dla pewnego operatora X, ale jednocześnie nie zachodzi warunek $S^*X = XU^*$. W ten sposób widać, że żadna asymetryczna wersja Twierdzenia Putnama-Fuglede dla operatorów paranormalnych nie jest prawdziwa.

Zdecydowana większość wyników zawartych w pierwszym rozdziale pochodzi z prac [2, 3, 4].

Drugim poruszanym aspektem własności asymptotycznych jest ich wpływ na Problem Podprzestrzeni Niezmienniczych. Problem ten w prosty sposób można sprowadzić do problemu dla kontrakcji klasy C_{10} oraz C_{00}. W świetle rezultatów uzyskanych w drugim rozdziale rozprawy doktorskiej redukujemy przypadek kontrakcji klasy C_{10} do przypadku kontrakcji klasy C_{10}, której asymptota izometryczna jest absolutnie ciągłym operatorem unitarnym bez wektorów wędrujących, gdzie wektory wędrujące definiujemy jak następuje.

Definicja 3.1.3. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią. Wektor w nazwiemy* wędrującym *jeśli*

$$\langle V^n w, w\rangle = 0,$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.

Zasadnicza treść drugiego rozdziału rozprawy doktorskiej jest kontynuacją idei przedstawionych przez Mlaka, Foiaşa oraz Suciu dotyczących miar Szegö. Skupia się ona na na rozkładach izometrii reprezentujących własności Szegö miar spektralnych. Tego typu rozkłady nazywane zostały rozkładami typu Szegö. Istotę rozważań prowadzonych w tym rozdziale zajmuje rozkład typu Szegö powstały dzięki domkniętemu liniowemu rozpięciu wszystkich wektorów wędrujących dla danej izometrii. Głównym rezultatem uzyskanym w tej części rozprawy doktorskiej jest opis rozważanego rozkładu w języku klasycznego rozkładu Lebesgue'a dla operatorów unitarnych. Wynik ten został opublikowany w pracy [1].

Twierdzenie. *Niech $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ będzie izometrią oraz niech H_w będzie domkniętą podprzestrzenią rozpinaną przez wszystkie wektory wędrujące dla V.*

Wtedy $\mathcal{H}_w$ jest podprzestrzenią redukującą izometrię V oraz rozkład $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_w$ można opisać jak następuje:

- *Jeśli V jest operatorem unitarnym nieposiadającym wektorów wędrujących, to* $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$,
- *w przeciwnym przypadku, mamy* $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{sing}$ *oraz* $\mathcal{H}_w = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_s$.

$\square$

Na zakończenie podany został inny rozkład typu Szegö wraz z jego częściowym opisem.

Bibliografia

[1] Z. Burdak, M. Kosiek, P. Pagacz, M. Słociński, *Shift-type properties of commuting, completely non doubly commutiong pairs of isometries*, praca przyjęta do druku, Integral Equations Operator Theory, 2014.

[2] P. Pagacz, *The Putnam-Fuglede property for paranormal and *-paranormal operators*, Opuscula Math. 33(2013), 565-574.

[3] P. Pagacz, *On Wold-type decomposition*, Linear Algebra Appl. 436(2012), 3065-3071.

[4] P. Pagacz, *On the power-bounded operators of classes* $C_{0\cdot}$ *and* $C_{1\cdot}$, arXiv:1206.0492v1.