Kraków, dnia 23.05.2014.

prof. dr hab. Marek Ptak
Katedra Zastosowań Matematyki
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Recenzja rozprawy doktorskiej
magistra PATRYKA PAGACZA
p.t.

"Własności asymptotyczne oraz własności Szegö dla wybranych klas operatorów ograniczonych"

na zlecenie Dziekana Wydziału Matematyczno - Informatycznego
Uniwersytetu Jagiellońskiego

Rozprawa mieści się w dziedzinie i dyscyplinie naukowej Matematyka, a w ramach tej dyscypliny w specjalności Teoria Operatorów. Dotyczy ona specjalnych klas operatorów jakimi są izometrie, kontrakcje, operatory potęgowo ograniczone oraz szeregu klas wywodzących się od operatorów hipo- i para–normalnych. Operatory te rozpatrywane są w kontekście rozkładów, przynależność do klas typu $C_{..}$, posiadania własności Putnama–Fuglede. Podstawowymi metodami stosowanymi są własności asymptotyczne, ciągi wsteczne, wektory wędrujące i własności typu Szegö.

W rozdziale 1 Autor przypomniał podstawowe definicje i własności dotyczące operatorów w przestrzeni Hilberta. Przedstawiono definicję (Def. 1.0.1) operatorów klas $C_{..}$. Operator ograniczony T w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, należy do klasy $C_{0\cdot}$, jeśli $\inf\{\|T^n x\| : n \in \mathbb{N}\} = 0$ dla $x \in \mathcal{H}$. Należy natomiast do klasy $C_{1\cdot}$, jeśli $\inf\{\|T^n x\| : n \in \mathbb{N}\} > 0$ dla $x \neq 0$. Natomiast operator T należy do klasy $C_{\cdot 0}$ lub $C_{\cdot 1}$, jeśli operator T^* należy do klasy $C_{0\cdot}$ lub $C_{0\cdot}$, odpowiednio.

Rozdział 2 dotyczy własności asymptotycznych operatorów ograniczonych należących do klas typu $C_{..}$. Dla danego operatora potęgowo ograniczonego T w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i danej granicy Banacha Λ można zdefiniować semi–iloczyn skalarny $[x, y] = \Lambda(\{< T^{*n}x, T^{*n}y >\}_{n\in\mathbb{N}})$. Jeśli $\mathcal{H}_0$ jest podprzestrzenią, na której zeruje się ten semi–iloczyn skalarny, to możemy wprowadzić przestrzeń $\mathcal{K}$ jako uzupełnienie przestrzeni ilorazowej $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$. Niech X oznacza naturalne rzutowanie z $\mathcal{H}$ na $\mathcal{K}$, $x \mapsto x + \mathcal{H}_0$. Wtedy, z własności granicy Banacha, rzutowanie X spełnia równość $\|Xx\| = \|XT^*x\|$ dla $x \in \mathcal{H}$. Przez asymptotę izometryczną operatora T^* rozumiemy jedyną izometrię $V : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ spełniającą równość $VX = XT^*$. Następnym istotnym pojęciem dla rozdziału drugiego jest pojęcie ciągu wstecznego, Def. 2.2.1. Dla ustalonego operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ciąg $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ jest ciągiem wstecznym względem tego operatora jeśli $Tx_{n+1} = x_n$.

Zasługującym na głębszą uwagę wynikiem dla operatora potęgowo ograniczonego jest charakteryzacja przynależności operatora do klasy $C_{\cdot 1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wszystkich początków ograniczonych ciągów wstecznych jest gęsty w przestrzeni $\mathcal{H}$, Tw. 2.2.5. Autor przedstawia inny dowód rezultatu (Tw 2.2.7) pochodzącego od Vũ dla operatora potęgowo ograniczonego charakteryzującego przynależność operatora do klasy $C_{\cdot 0}$ przez warunek równoważny, że zbiór wszystkich początków ograniczonych ciągów wstecznych redukuje się do zera.

Następnym istotnym wynikiem (Tw 2.3.3) dla operatorów potęgowo ograniczonych jest charakteryzacja przedstawienia operatora w postaci macierzowej z operatorem klasy $C_{\cdot 0}$ w lewym górnym rogu przez stałość ciągów norm elementów ograniczonego ciągu wstecznego. Konsekwencją tego rezultatu jest wynik dotyczący kontrakcji (Tw. 2.4.1) charakteryzujący przynależność zupełnie nieunitarnej części kontrakcji do klasy $C_{\cdot 0}$ przez stałość ciągów norm elementów ograniczonego ciągu wstecznego. Pozostała część Rozdziału 2 dotyczy klas operatorów paranormalnych, hiponormalnych i szeregu rozszerzeń tych klas. Tezy kolejnych twierdzeń (Tw. 2.4.8, 2.4.9) również mówią o przynależności zupełnie nieunitarnej części kontrakcji do klasy $C_{\cdot 0}$ przy różnych założeniach, np. (p, k)–quasihiponormalności.

Podrozdziały 2.6, 2.7 dotyczą własności Putnama–Fuglede. Własność ta wywodzi się od klasycznego twierdzenia mówiącego, że jeśli operator normalny jest przemienny z zadanym operatorem, to jest on przemienny z jego sprzężeniem. Mówimy, że operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ma własność Putnama–Fuglede, jeśli równość $T^*X = XJ$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ oraz dla wszystkich izometrii $J \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takich, że $TX = XJ^*$. Należy odnotować Twierdzenie 2.7.2 mówiące, że dowolny operator (p, k)–quasihiponormalny ma własność Putnama–Fuglede.

Rozdział 3 dotyczy rozkładów dla izometrii. Nawiązuje on do klasycznego pochodzącego od Wolda rozkładu izometrii na cześć unitarną i przesunięcie jednostronne pewnej krotności oraz do rozkładu Lebesgue'a operatora unitarnego na część składającą się z wektorów, dla których miary elementarne są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a oraz część składającą się z wektorów, dla których miary elementarne są singularne względem miary Lebesgue'a. Autor rozpatruje rozkłady typu Szegö. Dla zadanej izometrii $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ rozkład przestrzeni $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, gdzie $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ redukują V, jest rozkładem typu Szegö, jeśli wszystkie miary elementarne pochodzące od wektorów z przestrzeni $\mathcal{H}_1$ są miarami Szegö, czyli są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgues'a na okręgu jednostkowym oraz logarytm ich pochodnych Radona–Nikodyma jest całkowalny w sensie Lebesgue'a, natomiast wszystkie miary elementarne pochodzące od wektorów z przestrzeni $\mathcal{H}_0$ są miarami Szegö singularnymi, tzn. przestrzeń typu H^2 dla tej miary jest równa całej przestrzeni L^2. W odróżnieniu od rozkładu Wolda, gdzie kluczowe są przestrzenie wędrujące, kluczowym w tym rozdziale jest pojęcie wektora wędrującego. Wektor $x \in \mathcal{H}$ nazywamy wędrującym dla izometrii V, jeśli $< V^n x, x >= 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Ciekawym wynikiem jest Twierdzenie 3.2.3, które mówi, że dla zadanej izometrii $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ rozkład przestrzeni na domknięcie podprzestrzeni generowanej przez wektory wędrujące $\mathcal{H}_w$ oraz jej dopełnienie ortogonalne $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_w^{\perp}$, tzn. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_w$, jest rozkładem typu

Szegö. Ostatni podrozdział nawiązuje do problemu istnienia nietrywialnej podprzestrzeni niezmienniczej dla dowolnego operatora ograniczonego w przestrzeni Hilberta. Autor uzyskuje pewną redukcję tego problemu.

Na szczególne podkreślenie i wyróżnienie zasługuje duża liczba przykładów przedstawionych w pracy. Praktycznie rzecz biorąc, jeśli wprowadzone są dwa różne pojęcie, to przedstawiony jest również przykład różnicujący te pojęcia. Niektóre z przykładów są proste, niektóre natomiast wymagały głębokiej analizy, dokładnego zrozumienia problemu i wyczucia, Przykład 3.4.1.

Na uznanie również zasługuje bardzo staranna i przejrzysta redakcja pracy wyrażająca się nawet w takich szczegółach, jak staranny dobór oznaczeń, co znakomicie wpłynęło na jej przejrzystość. W pracy można znaleźć drobne błędy. W Definicji 1.0.1 punkt 2 brakuje założenia $x \neq 0$. W Twierdzeniu 1.0.2 pojawia się pojęcie przesunięcia jednostronnego, które nie jest wcześniej precyzyjnie zdefiniowane. Pojęcie to jest kluczowe dla pracy i moim zdaniem powinno się w niej znaleźć.

Oceniając merytorycznie całą pracę, uważam, że rezultaty uzyskane przez doktoranta stanowią interesujący wkład w teorię operatorów dotyczącą kontrakcji, operatorów potęgowo ograniczonych oraz operatorów klas $C_{\cdot\cdot}$. Podjęcie powyższej problematyki badawczej oraz swobodne poruszanie się w metodach dowodowych wymagało od doktoranta szerokiej i gruntownej wiedzy z teorii operatorów. Za najistotniejszy wkład doktoranta uważam umiejętne znalezienie związków między ciągami wstecznymi a klasami $C_{\cdot\cdot}$ oraz między wektorami wędrującymi a rozkładami typu Szegö.

Reasumując uważam, że praca magistra Patryka Pagacza odpowiada wymogom pracy doktorskiej określonym w ustawie z dnia 14 marca 2003 o tytule naukowym i stopniach naukowych. Wnoszę o dopuszczenie jej do publicznej obrony. Oprócz wkładu w Teorię Operatorów, który jest niewątpliwy, duża liczba adekwatnych przykładów, o których wspominałem wyżej, pozwala mi na wnioskowanie o wyróżnienie pracy.

M. Ptak