RECENZJA OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO ORAZ POZOSTAŁEGO DOROBKU W PRZEWODZIE HABILITACYJNYM DR MARTY KOSEK

ANNA ZDUNIK

Pani dr Marta Kosek przedstawiła do oceny w postępowaniu habilitacyjnym cykl prac (Osiągnięcie naukowe w rozumieniu Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym): "Teoria pluripotencjału i multifunkcje na gruncie dynamiki zespolonej". Cykl składa się z siedmiu publikacji, z których trzy zostały napisane wspólnie z Maciejem Klimkiem, a dwie-wspólnie z Leokadią Białas-Cież. Wnioskodawczyni precyzyjnie określa swój wkład we wspólne prace. Współautorzy przedstawili oświadczenia, które również szczegółowo opisują rolę wnioskodawczyni w pracy nad publikacjami.

Do cyklu prac dołączony jest Autoreferat, zawierający przedstawienie uzyskanych wyników oraz, pomocne dla czytelnika, wprowadzenie w tematykę i omówienie pokrewnych rezultatów oraz pytań. Autoreferat przedstawia też krótko pozostały dorobek naukowy.

Ocena Osiągnięcia naukowego.

Praca [K1], napisana wspólnie z Maciejem Klimkiem jest interesującym rozwinięciem wcześniejszych pomysłów Klimka. W pracy "Metric associated with extremal plurisubharmonic functions"(Proc. AMS. 1995), Klimek zaproponował naturalną zupełną metrykę zdefiniowaną w przestrzeni $\mathcal{R}$ zwartych, wielomianowo wypukłych podzbiorów $\mathbb{C}^n$. Zauważył też, używając swoich wcześniejszych wyników (o zachowaniu wielowymiarowej funkcji Greena przy iterowaniu wielomianu) że metryka ta jest kontrakcją dla działania naturalnego przekształenia $\mathcal{H} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, utworzonego przez skończoną rodzinę regularnych wielomianów.

W omawianej pracy rozważa się nieskończone rodziny wielomianów (oznaczane $\mathcal{F}$). Od rodziny żądamy "jednakowej regularności". Taka regularna rodzina $\mathcal{F}$ generuje przekształcenie $\mathcal{H}_{\mathcal{F}} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ określone takim samym wzorem jak we wcześniejszej pracy Klimka, i, podobnie, otrzymujemy kontrakcję. Ponadto, w pracy sprawdza się (Theorem 3.5) że przekształcenie $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ zachowuje klasę zbiorów dla których funkcja Greena jest Hölderowsko ciągła.

W dalszej części rozważa się układy "nieautonomiczne", to znaczy generowane przez nieskończone macierze; w kolejnych krokach stosujemy przekształcenia z kolejnych wierszy macierzy. Mamy więc rodzinę kontrakcji $\mathcal{H}_n$, i, znów korzystając z zupełności przestrzeni $\mathcal{R}$– zbiór graniczny K_+ dla działania tej rodziny

AZ

przekształceń. Zbiór graniczny ma dodatkową, interesującą charakteryzację dynamiczną (Thm 4.6– uogólnienie pojęcia wypełnionego zbioru Julii).

Wartością omawianego wyniku jest więc nietrywialne spostrzeżenie że można, dokładając naturalne założenie, uogólnić wcześniejsze twierdzenie Klimka na rodziny nieskończone i na układy nieautonomiczne.

Ostatni rozdział pracy dotyczy analitycznej zależności zbioru K_+ od układu wielomianów generującego dynamikę; tu pojawia się dodatkowe założenie o tym że każdy wiersz ma skończoną długość. Mamy więc funkcję określoną na otwartym podzbiorze zespolonej przestrzeni Banacha (opisującej macierz wielomianów), o wartościach w $\mathcal{R}$– czyli multifunkcję. Słaba analityczność (w sensie definicji zaproponowanej przez Słodkowskiego) jest częściowo wnioskiem z kilku wcześniejszych rezultatów m.in. wcześniejszej pracy Klimka. Zagadnienie analitycznej zależności niezmiennyczych podzbiorów od przekształcenia (rodziny przekształeń) było rozważane przez kilku autorów (poza wymienionymi: także Baribeau, Ransford, Roy), ale- nie zostało dotąd dokładniej zbadane, i omawiana praca (a także [K2] oraz [K3]) mogą być punktem wyjścia do dalszych, wedlug mnie ważnych badań.

W praca [K2], również wspólnej z M. Klimkiem, rozważa się "nieautonomiczne" układy złożone z wielomianów, i dla nich dowodzi silną analityczność (to znaczy: silnie analityczną zależność od "macierzy wielomianów") inaczej zdefiniowanego, mniejszego zbioru Julii k_+. Zbiór K_+ otrzymuje się z niego przez wzięcie wielomianowej otoczki wypukłej. Dowód nie jest zbyt skomplikowany; opiera się na przedstawieniu k_+ jako sumy zbiorów z których każdy jest silny analityczny, jako granica malejącego ciągu zbiorów silnie analitycznych.

Mimo że praca nie zawiera wyraźnych nowych metod, dotyka ona, podobnie jak poprzednia, otwartych i –według mnie– ciekawych zagadnień. Na przykład– dyskutowane w pracy pytanie czy zbiór K_+ jest silnie analityczą multifunkcją. Podany na końcu pracy przykład wskazuje na delikatność tego pytania: co prawda k_+ jest silnie analityczny, a K_+ jest jego otoczką wypukła, ale w ogólności wlasność silnej analityczności multifunkcji nie musi sie zachowywać przy wzięciu otoczki wielomianowo wypukłej.

Kolejna wspólna praca z M. Klimkiem [K3] rozważa podobne pytania, ale dla innych układów. Tutaj bada się układy zdefiniowane przez macierze zbudowane z afinicznych kontrakcji na ustalonej zespolonej przestrzeni Banacha E. Są to więc uogólnienia afinicznych układów iteracyjnych. Pierwsza obserwacja (Twierdzenie 2.3) to rozważenie nieskończonego ciągu kontrakcji, któremu przyporządkowujemy punkt w E- jest to punkt graniczny dla iteracji. Twierdzenie mówi że ta zależność jest holomorficzna. Twierdzenie 6.1 z tej pracy jest podobne (choć dotyczy innego kontekstu) do Twierdzenia 6.1 z pracy [K2]. Mianowicie, przy pewnych naturalnych założeniach na układ, przekształcenie

Ak

$T \mapsto A(T)$ (gdzie A jest atraktorem tego układu) jest silnie analityczną multifunkcją.

Praca [K4], wspólna z Leokadią Białas- Cież dotyczy tzw. warunku Łojasiewicza–Siciaka; jest to warunek na szacowanie "hölderowskie z dołu"(tzn. szacowanie z dolu dla funkcji Greena, na uzupełnieniu zwartego podzbioru $\mathbb{C}^n$, przez pewną dodatnią potęgę odległości od zbioru. Autorki pracy rozważają tylko sytuację jednowymiarową. W pracy sprawdza się że układ iteracyjny złożony z afinicznych kontrakcji, i spełniający tzw. warunek COSC (closed open set condition) ma zbiór graniczny całkowicie niespójny, jednostajnie doskonały, dla którego jest spełniony warunek Łojasiewicza-Siciaka. Dowód jest dość techniczny. Część komplikacji wynika stąd że dopuszcza się sytuację gdy zbiór spełniający warunek COSC nie jest spójny. W pracy dowodzi się nieco więcej niż tylko warunek Łojasiewicza– Siciaka. Na przykład Corollary 3.5 daje dobre szacowanie miary harmonicznej "cylindra" przez wartość funkcji Greena w odpowiednich punktach.
Dowód bez trudu da się zapewne uogólnić na układy zbudowane z kontrakcji konforemnych, niekoniecznie afinicznych.

Praca [K5] wspólna z Leokadią Białas- Cież zawiera dwa twierdzenia (Thm.1.1. i Thm 1.2), które służą do budowy nowych przykładów zbiorów z własnością Markowa (m.in. Ex 3.1 i 3.2) Nie omawiam ich dokładnie, ponieważ z deklaracji obu Autorek wynika że ta część pracy należy do pani dr Białas- Cież. Z rozdziałów (4-6) (ich autorką, wedlug deklaracji, jest pani dr Kosek) chcę wyróżnić twierdzenie 6.1. Podaje ono warunki wystarczające na to aby zbiór graniczny dla rodziny kontrakcji w $\mathbb{C}$, utworzonej według schematu podobnego do tego w [K3], był jednostajnie doskonały. Warunek jednostajnej doskonałości implikuje hölderowską ciągłość funkcji Greena, a stąd- własność Markowa. Stąd waga tego typu przykładów.

Praca [K6] została napisana bez współautorów. Nawiązuje ona do [K1] oraz do wcześniejszej (nie wchodzącej w skład omawianego cyklu) pracy habilitantki Hölder continuity property of filled-in Julia sets in $\mathbb{C}^n$ (Proc. AMS, 1997). W omawianej pracy uzyskuje się podobny wynik, to znaczy sprawdza się hölderowską ciągłość wielowymiarowej funkcji Greena (lub, równoważnie, hölderowską ciągłość ekstremalnej funkcji Siciaka) dla zbioru K_+ (analogonu wypełnionego zbioru Julii), utworzonego dla rodziny, a właściwie- ciągu wstępującego rodzin regularnych wielomianów.
Wartością tej pracy jest zauważenie że dzięki (pochodzącej z wcześniejszych prac Klimka) nierówności pokazującej zachowanie ekstremalnej funkcji Siciaka przy składaniu z wielomianami- można nie tylko udowodnić hölderowską ciągłość, ale także oszacować z dołu wykładnik Höldera.
W pracy są też liczne przykłady i konkretne wyliczenia wykładnika Höldera.

Uf

[K7] omawia to samo zagadnienie w przypadku jednowymiarowym. Twierdzenie 1.1. zawiera oczekiwane szacowanie dla wielomianów w $\mathbb{C}$; jest to szczególny przypadek Twierdzenia 6.1 z pracy [K6].
Ciekawe są konkretne szacowania z dołu stałej Höldera dla wielomianów kwadratowych i trzeciego stopnia- dla spójnych i całkowicie niespójnych zbiorów Julii. Wymagają one, dla każdego konkretnego przykładu, jakiegoś szacowania położenia zbioru Julii (np wskazania konkretnego obszaru w którym wypełniony zbiór Julii na pewno jest zawarty).

Przedstawiony cykl prac jest spójny tematycznie, a powiązania między omawianymi zagadnieniami zostały dobrze opisane w Autoreferacie.

Z tej serii prac najbardziej podobają mi się wyniki uzyskane wspólnie z M. Klimkiem, zawarte w [K1] i K[2]. Wprowadzają one interesujące klasy autonomicznych i nieautonomicznych układów zbudowanych przez wielomiany, proponują definicje zbiorów granicznych i dyskutują niełatwe zagadnienie analitycznej zależności tych obiektów od macierzy wyjściowych wielomianów. Są też źródłem interesujących otwartych pytań, dyskutowanych w pracach, i punktem wyjścia do dalszych badań.
Całość przedstawionego osiągnięcia naukowego wygląda solidnie. Autorka wykazuje swoją dobrą orientację w niełatwej tematyce. Ważna jest umiejętność nawiązania trwałej współpracy, na równych prawach.

Ocena pozostałego dorobku, w tym- ocena cytowalności prac
Na pozostały dorobek składa się siedem prac, w tym- jedna przeglądowa i jedna o charakterze raczej dydaktycznym (materiały Warsztatów dla Młodych Matematyków). Z pozostałych pięciu prac na uwagę zasługują przede wszystkim [M1]- z dowodem hölderowskiej ciągłości wielowymiarowej funkcji Greena dla klasy wielomianów w $\mathbb{C}^n$ (wielomiany właściwe z wykładnikiem Łojasiewicza większym niż 1). Dowód jest nietrudny, ale wynik- ważny!
[M2] jest rozwinięciem [M1] na układy generowane przez skończoną rodzinę wielomianów.
Ciekawa jest też praca [M3], inspirowana wynikami Pleśniaka i Barana, wykazująca szacowania typu Höldera dla części wypełnionego zbioru Juli zawartej w niezmienniczym dla wielomianu zbiorze algebraicznym.
[M5] zaś jest omówienie wyników dotyczących nierówności Łojasiewicza-Siciaka (częściowo jest to więc praca przeglądowa).
Wreszcie [M6] zawiera ważną z punktu widzenia [K1], [K2] dyskusję o różnych definicjach zbioru Julii dla układu generowanego przez rodzinę wielomianów.

AZ

Pozostały dorobek nie jest więc bardzo obszerny. Zawiera on ciekawe wyniki, w tematyce zbliżonej do tematyki prezentowane w cyklu prac składających się na Osiągnięcie naukowe.

Publikacje pani dr Marty Kosek ukazują się w dobrych lub niezłych pismach o zasięgu międzynarodowym. Prace są zauważane, choć cytowalność nie jest duża (28 cytowań według MathScinet). Najczęściej cytowaną publikacją jest [M1]. MathScinet nie "widzi" zapewne wszystkich cytowań, tych zamieszczonych w przeglądowych artykułach i książkach. Praca [M1] jest cytowana na przykład w monografii Dinha i Sibony'ego "Dynamics in several complex variables: endomorphisms of projective spaces and polynomial- like mappings." (L.N. Math. 1998). Praca ta jest na ogól też cytowana przez specjalistów podczas wykładów wprowadzających do dynamiki wielu zmiennych zespolonych, ze względu na jej znaczenie w teorii. Słuchałam kilku takich wykładów, cytujących [M1], na międzynarodowych konferencjach.

Habilitantka przedstawiła referaty na licznych konferencjach krajowych i międzynarodowych, uczestniczyła w krajowych i międzynarodowych projektach badawczych.

Ocena w zakresie dorobku dydaktycznego i popularyzatorskiego oraz współpracy międzynarodowej

Habilitantka bierze czynny udział w życiu społeczności matematycznej (udokumentowana praca organizacyjna, duża aktywność popularyzatorska i dydaktyczna). Odwiedza zagraniczne ośrodki naukowe (Lille, Tuluza, Uppsala).

Podsumowanie: Uważam że przedstawione do oceny Osiągnięcie naukowe, jak również pozostały dorobek spełnia wymagania stawiane w przewodach habilitacyjnych. Habilitantka dowiodła samodzielności, umiejętności stawiania trafnych pytań i rozwijania teorii. Prowadziłą udaną współpracę. Przedstawione publikacje zawierają wyniki interesujące z punktu widzenia dynamiki jednej i wielu zmiennych zespolonych, oraz teorii (pluri)potencjału. Mogą być punktem wyjścia dla dalszych badań.

Konkluzja: Uważam, na podstawie całości dokumentacji, że pani dr Marta Kosek spełnia wymagania stawiane w przewodach habilitacyjnych. Popieram jej wniosek o nadanie stopnia doktora habilitowanego nauk matematycznych.

Anna Zdunik

ANNA ZDUNIK, INSTYTUT MATEMATYKI, UNIWERSYTET WARSZAWSKI, UL. BANACHA 2, 02-097 WARSZAWA