

# Recenzja rozprawy doktorskiej

mgr. Kewina Pączka

pt. „Statistical analysis based on quantile conditional moments”

**Promotor:** prof. dr hab. inż. Agnieszka Wyłomańska

**Promotor pomocniczy:** dr hab. Marcin Pitera

**Jednostka:** Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki, Instytut Matematyki

## 1 Ogólna charakterystyka rozprawy

Rozprawa doktorska mgr. Kewina Pączka poświęcona jest statystycznej analizie opartej na kwantylowych momentach warunkowych. Tematyka pracy lokuje się na styku teorii prawdopodobieństwa, statystyki matematycznej, odpornej analizy danych oraz zastosowań w modelowaniu zjawisk ciężkoogonowych. Jest to obszar ważny zarówno z punktu widzenia metodologii statystycznej, jak i praktyki, ponieważ klasyczne charakterystyki rozkładu, takie jak średnia, wariancja, skośność czy kurtoza, bywają niestabilne lub wręcz niezdefiniowane w modelach o ciężkich ogonach.

Autor proponuje i systematyzuje podejście, w którym informacja o rozkładzie jest wydobywana z warunkowych momentów obliczanych na zbiorach wyznaczanych przez kwantyle. Takie charakterystyki zachowują lokalny charakter, są mniej podatne na wpływ obserwacji skrajnych, a jednocześnie mogą nieść istotną informację o strukturze rozkładu, zależnościach oraz zachowaniu ogonów.

Praca łączy wyniki teoretyczne z konstrukcją procedur statystycznych i ich empiryczną oceną. Zasadniczą podstawą rozprawy są cztery prace autora i współautorów, opublikowane w międzynarodowych czasopismach z obszaru statystyki, matematyki stosowanej i matematyki finansowej, uzupełnione o nowe wyniki przedstawione bezpośrednio w dysertacji.

## 2 Struktura rozprawy

Rozprawa składa się z ośmiu rozdziałów oraz dodatku.

Rozdział pierwszy zawiera wstęp wprowadzający w tematykę rozprawy. Rozdział drugi przedstawia przegląd literatury dotyczącej momentów warunkowych, metod odpornych, rozkładów ciężkoogonowych oraz miar zależności. Autor formułuje w nim luki badawcze, hipotezy pracy oraz omawia własny wkład, oparty przede wszystkim na opublikowanych artykułach naukowych. Rozdział trzeci wprowadza podstawowe pojęcia, oznaczenia oraz narzędzia probabilistyczne i statystyczne wykorzystywane w dalszej części pracy. Szczególną

uwagę poświęcono definicjom warunkowych momentów kwantylowych oraz wybranym rodzinom rozkładów, takim jak rozkład normalny, rozkład Studenta, rozkłady eliptyczne, stabilne i uogólnione Pareto.

Rozdział czwarty przedstawia główne własności matematyczne momentów warunkowych, w tym ich rolę w charakteryzacji rozkładów oraz badaniu niezależności. Oprócz prezentacji klasycznych wyników z literatury, w rozdziale tym zawarto podstawowe wyniki matematyczne rozprawy, obejmujące w szczególności:

- uogólnienie twierdzeń charakteryzacyjnych dotyczących równości rozkładów na przypadek równości ustalonego momentu warunkowego na każdym przedziale;
- wyniki dotyczące reguły 20/60/20 dla rozkładu Studenta oraz jej relacji do przypadku normalnego;
- charakteryzację wielowymiarowego rozkładu normalnego przy użyciu warunkowej macierzy kowariancji i analogiczną charakteryzację dla rozkładów eliptycznie konturowanych;
- wyniki dotyczące aproksymacji i uporządkowania kwantyli rozkładów alfa-stabilnych względem parametru stabilności oraz monotoniczności wariancji warunkowych.

Rozdział piąty dotyczy estymatorów i statystyk opartych na warunkowych momentach kwantylowych. Autor bada ich zgodność, asymptotyczną normalność oraz zastosowania do konstrukcji warunkowych korelacji, autokorelacji i miar ogonowości. Proponuje również modyfikację problemu konstrukcji optymalnego portfela przez zastąpienie klasycznej macierzy kowariancji jej odpowiednikiem warunkowym i udowadnia zbieżność tego rozwiązania do rozwiązania klasycznego w przypadku, gdy wektor zwrotów ma wielowymiarowy rozkład normalny.

Rozdział szósty zawiera konkretne procedury wnioskowania statystycznego oparte na momentach warunkowych. Obejmują one estymację indeksu stabilności dla symetrycznego rozkładu stabilnego, estymację parametru skali dla jednostronnego rozkładu Lévy'ego, test zgodności z tym rozkładem oraz analizę odporności warunkowej autokorelacji w modelach szeregów czasowych. Autor bada własności asymptotyczne zaproponowanych statystyk i numerycznie porównuje ich działanie z metodami klasycznymi.

Rozdział siódmy prezentuje zastosowania proponowanych metod do danych rzeczywistych. Przykłady obejmują dane finansowe, dane z fizyki plazmy, dane dotyczące czasów przeżycia zbiorników ciśnieniowych oraz analizę portfeli i zależności warunkowych na rynku S&P.

Rozdział ósmy podsumowuje główne wyniki rozprawy i odnosi je do hipotez badawczych sformułowanych wcześniej w pracy. Autor wskazuje zarówno znaczenie teoretyczne uzyskanych rezultatów, jak i ich potencjał aplikacyjny.

### 3 Ocena merytoryczna

Temat rozprawy jest aktualny i dobrze uzasadniony. Problem stabilnej analizy statystycznej dla rozkładów ciężkoogonowych jest ważny zarówno teoretycznie, jak i aplikacyjnie. Wybór kwantylowych momentów warunkowych jako głównego narzędzia jest naturalny, ponieważ łączy odporność metod kwantylowych z interpretowalnością momentów. W wielu rozważanych sytuacjach, zwłaszcza dla rozkładów stabilnych, klasyczne momenty nie istnieją, natomiast momenty warunkowe na przedziałach kwantylowych pozostają dobrze określone.

Po stronie teoretycznej rozprawa zawiera kilka ciekawych i potencjalnie użytecznych wyników. Uogólnienie twierdzeń o charakteryzacji rozkładu przez momenty warunkowe, wyniki dla rozkładów Studenta i eliptycznych oraz twierdzenia dotyczące monotoniczności wariancji warunkowych w rodzinie rozkładów stabilnych stanowią spójny wkład w teorię. Interesująca jest również próba połączenia tych wyników z konkretnymi procedurami statystycznymi.

Po stronie statystycznej na uwagę zasługują wyniki o zgodności i asymptotycznej normalności naturalnych estymatorów warunkowych kowariancji, korelacji i autokorelacji, a także wyniki dotyczące asymptotycznej normalności statystyk opartych na proporcjach i różnicach momentów warunkowych. Są to wyniki potrzebne, ponieważ bez nich proponowane procedury estymacji i testowania pozostałyby jedynie heurystykami. W tym sensie rozprawa dobrze łączy inspirację probabilistyczną z rygorem statystyki matematycznej.

Ciekawą częścią pracy są również badania symulacyjne. Wyniki dotyczące estymacji parametru stabilności pokazują, że estymatory oparte na proporcjach wariancji warunkowych mogą być konkurencyjne w części zakresu parametrów. Warto jednak zauważyć, że nie dają one wyraźnej poprawy względem metody regresyjnej (REG) opartej na funkcji charakterystycznej. Szczególnie obiecujący wydaje się natomiast fakt, że kombinacje wypukłe tych estymatorów z estymatorami uzyskanymi metodą REG są istotnie lepsze od obu tych metod, co wspiera tezę o komplementarności proponowanych charakterystyk wobec podejść klasycznych.

Za mocną stronę pracy uznają także próbę zastosowania metod warunkowo-momentowych w finansach, w tym do pomiaru ciężkości ogonów i konstrukcji portfeli. Pomysł zastąpienia klasycznej macierzy kowariancji macierzą kowariancji warunkowej jest naturalny i dobrze wpisuje się w główną narrację rozprawy. Istotne jest również wykazanie, że w przypadku danych z rozkładu normalnego odpowiedni estymator portfelowy zbiega do klasycznego portfela Markowitza, co zapewnia zgodność proponowanego rozszerzenia z modelem referencyjnym.

## 4 Uwagi krytyczne i kwestie wymagające doprecyzowania

Mimo ogólnie pozytywnej oceny rozprawy, praca ma również słabsze strony. Część z nich dotyczy sposobu prezentacji wyników oraz poziomu doprecyzowania niektórych argumentów.

- Znaczna część pracy polega na przytoczeniu wyników znanych z wcześniejszych prac Jaworskiego, Jelity i Pitery, a przywołane dowody często nie zawierają uzupełnień, które umożliwiłyby ich pełne zrozumienie. Przykładowo, dowód Twierdzenia 4.2.1 wymagałby szerszej dyskusji teorii funkcji kopułowych. Brakuje wyjaśnienia oznaczenia funkcji  $c(x, y)$  oraz uzasadnienia przejść we wzorze (4.2.4).
- Miejscami widoczne są braki definicyjne i terminologiczne. W wielu miejscach definicje istotne dla zrozumienia omawianych obiektów zostały przeniesione do dodatku, co utrudnia płynne czytanie rozprawy. Przykładem jest brak w zasadniczej części rozprawy definicji obiektu Value at Risk, który pełni istotną rolę w Definicji 4.6.1.
- W części dotyczącej symulacyjnego porównania testów zgodności przydałoby się pełniejsze omówienie sposobu wyznaczania wartości krytycznych. W szczególności nie jest jasne, czy wartości krytyczne pochodzą z rozkładu asymptotycznego, czy były generowane symulacyjnie.
- Niektóre tytuły sekcji nie w pełni odpowiadają ich zawartości. Przykładowo, na stronie 90 użyto tytułu „Power of the test”, podczas gdy w rzeczywistości ta część dotyczy porównania dokładności różnych estymatorów indeksu stabilności.
- Przydałaby się pełniejsza dyskusja wyników empirycznych porównań. Przykładowo, test zgodności z rozkładem Lévy’ego ma interesującą konstrukcję i w wielu sytuacjach zachowuje się dobrze, jednak jego moc dla rozkładu Pareto jest niska. W tym miejscu pomocne byłoby dokładniejsze omówienie tego zjawiska. Podobnie estymatory parametru stabilności dla rozkładów stabilnych są wartościowe, lecz ich przewaga nad metodą REG jest niewielka i zależy od zakresu parametru oraz wyboru poziomów kwantylowych. Pełniejsza dyskusja i interpretacja tych obserwacji mogłyby dostarczyć wskazówek dotyczących zakresu stosowalności proponowanych metod.

## 5 Ocena znaczenia wyników

Rozprawa jest oparta na czterech pracach badawczych autora i współautorów oraz zawiera dodatkowe wyniki rozwijające wspólną metodologię. Zakres zagadnień jest szeroki: od twierdzeń charakteryzacyjnych, przez własności estymatorów, po testowanie zgodności i zastosowania finansowe. Taki zakres świadczy o dobrej orientacji autora w literaturze oraz o umiejętności łączenia narzędzi probabilistycznych ze statystycznymi.

Rozprawa konsekwentnie rozwija ideę wykorzystania kwantylowych momentów warunkowych jako odpornych charakterystyk rozkładu. Autor pokazuje, że idea ta prowadzi zarówno do wyników charakteryzacyjnych, jak i do praktycznych statystyk. Nawet tam, gdzie proponowane metody nie dominują jednoznacznie nad metodami klasycznymi, dostarczają dodatkowej informacji i mogą być użyteczne w podejściach łączonych.

Praca ma również wartość aplikacyjną. Analiza danych finansowych, danych z fizyki plazmy oraz przykładów związanych z rozkładem Lévy'ego pokazuje, że proponowane metody nie są wyłącznie konstrukcjami teoretycznymi. Szczególnie ważny jest ich potencjał w sytuacjach, w których klasyczne estymatory oparte na momentach globalnych są niestabilne.

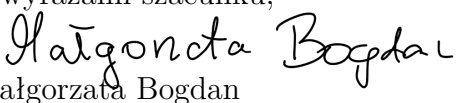
## 6 Konkluzja

Podsumowując, rozprawa doktorska mgr. Kewina Pączka dotyczy aktualnego i ważnego problemu statystycznej analizy danych ciężkoogonowych oraz charakterystyki rozkładów przy użyciu kwantylowych momentów warunkowych. Praca zawiera wartościowe wyniki teoretyczne, rozwija nowe procedury estymacji i testowania oraz prezentuje przykłady zastosowań. Jej mocną stroną jest spójność tematyczna i konsekwentne rozwijanie jednej metodologii w kilku kierunkach.

Wskazane wyżej uwagi krytyczne dotyczą głównie precyzji prezentacji, wyraźniejszego oddzielenia wkładu własnego od wyników znanych z literatury oraz doprecyzowania części pojęć i oznaczeń. Nie podważają one jednak zasadniczej wartości naukowej rozprawy.

W mojej ocenie rozprawa spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim w dyscyplinie matematyka. Wnoszę o dopuszczenie mgr. Kewina Pączka do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Z wyrazami szacunku,

  
Małgorzata Bogdan