

dr hab. Anna Dudek, prof. AGH
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Kewina Pączka *„Statistical analysis based on quantile conditional moments”*

Rozprawa doktorska wpisuje się w nurt statystyki matematycznej poświęconej badaniu momentów warunkowych pierwszego i drugiego rzędu, definiowanych z wykorzystaniem przedziałów wyznaczonych przez funkcję kwantylową. Problematyka pracy koncentruje się na zagadnieniu charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa poprzez ich własności lokalne, co stanowi teoretyczną alternatywę wobec klasycznych parametrów globalnych. Głównym przedmiotem rozważań jest badanie struktur stochastycznych, w których tradycyjne momenty bezwarunkowe mogą być nieokreślone bądź nie dostarczają pełnego opisu natury zjawiska, jak ma to miejsce w przypadku rozkładów o grubych ogonach.

W ujęciu aplikacyjnym rozwijane w pracy metody znajdują zastosowanie w modelowaniu ryzyka finansowego, optymalizacji portfeli inwestycyjnych oraz analizie sygnałów w fizyce i inżynierii. Umożliwiają one bardziej precyzyjne prognozowanie rzadkich, lecz kosztownych zdarzeń, co ma istotne znaczenie dla współczesnej ekonomii, sektora ubezpieczeniowego oraz diagnostyki technicznej.

Omówienie rozprawy doktorskiej

Rozdział 1 zawiera krótkie wprowadzenie do tematyki pracy. W rozdziale 2 Autor w sposób klarowny przedstawia podstawy teoretyczne oraz motywację dla stosowania momentów warunkowych opartych na kwantylach. Głównym argumentem za ich wykorzystaniem jest zawodność klasycznych miar, takich jak średnia i wariancja, w przypadku rozkładów o grubych ogonach, np. rozkładów stabilnych czy rozkładu t-Studenta, w których tradycyjne momenty mogą nie istnieć bądź nie odzwierciedlać w pełni charakteru zjawiska. Rozdział ten obejmuje staranny przegląd literatury dotyczącej zastosowania momentów warunkowych w kontekście wnioskowania statystycznego. Autor wskazuje również istotne, dotąd nierozwiązane problemy badawcze oraz formułuje hipotezy, które stały się podstawą prowadzonych badań. Zawarte w rozdziale podsumowanie wyników umożliwia czytelnikowi zorientowanie się we wkładzie własnym Autora.

W rozdziale 3 Autor definiuje kluczowe dla rozprawy pojęcia, jakimi są moment warunkowy rzędu k na zbiorze borelowskim A , dany wzorem $\mu_A(X) = E[X^k | X \in A]$ oraz jego wersja oparta o kwantyle rozkładu. Rozdział wprowadza czytelnika w problematykę rozkładów stabilnych $S(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ oraz rozkładów eliptycznych. Należy jednak zauważyć istotną nadmiarowość materiału: Autor przytacza obszerne fakty z literatury, włączając opisy standardowych rozkładów (np. normalnego, uogólnionego Pareto) oraz podstaw testowania hipotez. Tak rozbudowana część przeglądowa, w tym również obszerne aneksy,

sprawia, że oryginalny wkład Autora momentami jest przytłumiony przez treści podręcznikowe. Praca zyskałaby na klarowności, gdyby część standardowych wyprowadzeń zastąpiono odniesieniami bibliograficznymi, koncentrując się od razu na autorskich uogólnieniach i modyfikacjach.

Rozdział 4 prezentuje kluczowe twierdzenia teoretyczne dotyczące momentów warunkowych, stanowiące fundament metodologii przedstawionej w dysertacji. W pierwszej części rozdziału przywołane są kluczowe twierdzenia z literatury, takie jak te o charakterystyce rozkładu za pomocą warunkowych wartości średnich i wariancji (twierdzenia 4.1.1 i 4.1.2, prace Jaworskiego i Pitery z 2020 roku) oraz twierdzenie o związku warunkowej korelacji z niezależnością (twierdzenie 4.2.1, Jaworski i in., 2024). Autor przedstawia uproszczony dowód twierdzenia 4.1.2, co zwiększa przejrzystość i dostępność prezentowanych wyników. Istotnym wkładem własnym jest twierdzenie 4.1.3, w którym Autor uogólnia istniejące wyniki charakterystyki rozkładu na przypadek n -tego momentu warunkowego dla zmiennych absolutnie ciągłych. Następnie Autor przytacza twierdzenie 4.2.1 (Jaworski i in., 2024), które dostarcza teoretycznego uzasadnienia dla wykorzystania warunkowych korelacji w badaniu niezależności zmiennych losowych. W części rozdziału dotyczącej konkretnych rodzin rozkładów prawdopodobieństwa, Autor głównie przedstawia znane z literatury wyniki. Dla rozkładu normalnego oraz t-Studenta wykorzystuje istniejące wzory na momenty obciętych rozkładów, odpowiednio adaptując je do kwantylowej postaci momentów warunkowych. Wkładem własnym Autora jest natomiast samodzielne wyprowadzenie i zaprezentowanie w zwartej, kwantylowej formie jawnych wyrażeń na momenty warunkowe dla rozkładów Cauchy'ego i Lévy'ego. W kontekście rozkładów eliptycznych Autor szczegółowo omawia koncepcję znaną z literatury jako regułę 20/60/20. Kluczowym, oryginalnym wynikiem Autora w tym obszarze jest twierdzenie 4.4.3, w którym pokazuje zachodzenie analogicznej reguły podziału dla rozkładu t-Studenta o ν stopniach swobody, gdzie $\nu \geq \nu_0$, $\nu_0 \in (0, \infty)$. W sekcji 4.4.3 Autor kontynuuje analizę rozkładów eliptycznych. Ważnym wynikiem jest twierdzenie 4.4.4. stwierdzające, że w przypadku wielowymiarowego rozkładu normalnego, macierz kowariancji tego rozkładu wyraża się w terminach kowariancji warunkowej. W twierdzeniu 4.4.5 Autor dokonuje istotnego uogólnienia tego wyniku na całą klasę rozkładów eliptycznych. Najbardziej znaczący wkład własny Autora w rozdziale 4 koncentruje się wokół analizy rozkładów stabilnych symetrycznych (sekcja 4.5). W twierdzeniu 4.5.2. udowodniona została monotoniczność kwantyli względem indeksu stabilności α w obszarach ogonowych. Kluczowym i oryginalnym osiągnięciem jest twierdzenie 4.5.5, w którym Autor dowodzi monotoniczności wariancji warunkowej $\sigma_{(a,b)}^2(\alpha)$ względem α dla odpowiednio dużych kwantyli a i b . To twierdzenie ma fundamentalne znaczenie praktyczne, gdyż stanowi ściśle, matematyczne uzasadnienie dla konstrukcji nowego estymatora indeksu α w rozdziale 6 pracy. Sekcja 4.6 rozszerza rozważania na zastosowania praktyczne, w tym statystyki do pomiaru grubości ogonów, asymetrii rozkładu oraz warunkową funkcję autokorelacji (CACF) jako narzędzie do badania zależności w szeregach czasowych, nawet gdy klasyczne momenty drugiego rzędu nie istnieją.

Rozdział 5 poświęcony jest własnościom estymatorów momentów warunkowych oraz statystyk na nich opartych. W pierwszej części rozdziału Autor przywołuje wyniki Jelito i Pitery dotyczące własności (zgodności oraz asymptotycznej normalności) estymatorów warunkowej wartości oczekiwanej i wariancji opartych na kwantylach. Następnie pokazuje analogiczne rezultaty dla przypadku warunkowej kowariancji opartej na kwantylach. Najważniejszym wkładem własnym Autora w tym rozdziale jest udowodnienie ogólnego twierdzenia (twierdzenie 5.2.1.) o asymptotycznej normalności dla statystyk opartych na ilora-

zach wariancji warunkowych. Autor analizuje także własności estymatora funkcji CACF, dowodząc jego zgodności i asymptotycznej normalności dla ciągów niezależnych zmiennych losowych. Rozdział zamyka część ilustracyjna, pokazująca praktyczne zastosowania metodologii w finansach i zarządzaniu ryzykiem.

W Rozdziale 6 Autor wykorzystuje wyniki teoretyczne do praktycznej estymacji parametrów oraz testowania zgodności w rozkładach o ciężkich ogonach. Przedstawiony zostaje autorski estymator indeksu stabilności α dla rozkładu stabilnego oparty na ilorazie wariancji warunkowych, a także omówiony jest problem estymacji parametru skali dla rozkładu Lévy'ego. Najważniejszym wkładem Autora jest konstrukcja nowych testów zgodności dla rozkładów normalnego, stabilnego i Lévy'ego, wraz z przedstawieniem ich asymptotycznych rozkładów oraz wyników symulacji potwierdzających skuteczność w praktyce. W badaniach symulacyjnych dla modeli szeregów czasowych (MA, GARCH) z szumem o ciężkich ogonach wykazano przewagę funkcji CACF nad klasyczną funkcją ACF, co podkreśla praktyczne zastosowanie opracowanej metodologii.

Rozdział 7 poświęcony jest przykładowym zastosowaniom teoretycznych rezultatów do danych rzeczywistych. Otrzymane wyniki potwierdzają praktyczną użyteczność reguły 20/60/20 oraz skuteczność wprowadzonych w pracy estymatorów opartych o kwantyle w wykrywaniu zależności, które mogą nie być widoczne dla klasycznej funkcji ACF. Szczególnie wartościowe jest wykazanie, że model Markowitza oparty na estymatorach warunkowych osiąga lepsze wyniki niż podejście klasyczne na danych rynkowych z USA.

Uwagi i pytania

Przedłożona rozprawa doktorska zawiera obszerny materiał o charakterze przeglądowym, obejmujący prezentację znanych wyników wraz z ich szczegółowymi dowodami. W mojej ocenie zakres tej części pracy jest miejscami nadmierny w stosunku do standardów rozpraw doktorskich. Szczególnie Rozdział 3 jest zbyt rozbudowany, obejmuje liczne elementarne definicje oraz powszechnie znane fakty teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, takie jak centralne twierdzenie graniczne czy podstawowe definicje momentów. Również przytoczenie dowodów znanych własności, w tym formuł dotyczących momentów uciętego rozkładu normalnego, nie wydaje się konieczne z punktu widzenia celów pracy. Zasadne byłoby ograniczenie tej części do niezbędnych oznaczeń i definicji oraz odwołań do literatury klasycznej, co poprawiłoby przejrzystość i pozwoliłoby lepiej wyeksponować wkład własny Autora.

Rozdział 4 ma wyraźną wartość merytoryczną i istotnie wspiera realizację celów rozprawy. Autor przedstawia pogłębioną analizę teoretycznych własności momentów warunkowych oraz ich związków z charakterystykami rozkładów prawdopodobieństwa. Pewne zastrzeżenia budzi jednak sposób prezentacji, w którym treści przeglądowe i twierdzenia autorskie występują w jednym ciągu narracyjnym, utrudniając jednoznaczne wskazanie oryginalnego wkładu. W celu zwiększenia przejrzystości pracy i wyeksponowania jej walorów naukowych wskazane byłoby syntetyczne podsumowanie rezultatów własnych Autora lub wyraźne zaznaczenie ich w tekście.

Podobne uwagi dotyczą Rozdziału 5, w którym dostrzegalna jest dysproporcja pomiędzy szczegółowym omówieniem wyników przeglądowych a prezentacją rezultatów autorskich. W Sekcji 5.1, dotyczącej podstawowych estymatorów, przytoczenie wyników Jelito i Pitery (2021) jest uzasadnione, jednak pełne dowody tych twierdzeń nadmiernie rozbudowują rozdział i przesłaniają wkład własny. W pracy doktorskiej wystarczające byłoby podanie sformułowań twierdzeń wraz z odwołaniem do literatury oraz zwięzłym komen-

tarzem dotyczącym ich znaczenia dla dalszych analiz.

1. W rozdziale 4.4.2 rozważana jest reguła 20/60/20 dla rozkładu t-Studenta (Tw. 4.4.3) o odpowiednio dużej liczbie stopni swobody. Czy istnieje metoda wyznaczenia dolnej granicy ν_0 ? Z uwagi na to, że rozkład t-Studenta przy dużych wartościach ν jest bardzo bliski rozkładowi normalnemu, interesujące byłoby określenie, dla jak małych wartości ν reguła nadal zachowuje swoją istotność.
2. We wniosku 4.5.6 wskazano, że monotoniczność może być zaburzona dla $a < 0.65$. Czy oznacza to, że zaproponowany estymator indeksu α , oparty na tej własności, może w takich przypadkach być zawodny? W jaki sposób należy dobierać parametry (a, b, d) , aby zminimalizować ryzyko błędu estymacji?
3. Większość analiz w pracy odnosi się do przypadków jedno- lub dwuwymiarowych. Jak zaproponowane estymatory zachowują się w problemach wysokowymiarowych, np. przy optymalizacji portfela złożonego z 500 spółek? Czy kłątwa wymiarowości nie spowoduje, że zbiory A staną się zbyt „puste”, utrudniając stabilną estymację?
4. Zaproponowane estymatory dedykowane są rozkłodom o grubych ogonach (np. stabilnym). Jednak przy ekstremalnie niskich wartościach α (bliskich 0), próba empiryczna może być zdominowana przez nieliczne, wyjątkowo duże obserwacje. Czy istnieje teoretyczna granica „grubości ogona”, powyżej której nawet momenty warunkowe tracą praktyczną użyteczność?
5. Jak zaproponowane testy zgodności (np. dla rozkładu Lévy’ego) wypadają pod względem szybkości obliczeń w porównaniu do klasycznego testu Kołmogorowa-Smirnowa? Czy metody te są gotowe do implementacji w systemach transakcyjnych czasu rzeczywistego (High-Frequency Trading)?
6. W sekcji 7.1 Autor stosuje metodę bootstrapowania. Jaka konkretnie procedura bootstrapowa została użyta i jakie rodzaje przedziałów ufności skonstruowano?
7. Praca doktorska mgr. Pączka bazuje na czterech manuskryptach, z których trzy zostały opublikowane, przy czym we wszystkich Pan Pączek występuje jako współautor. Spodziewam się, że podczas obrony Pan Pączek szczegółowo przedstawi swój wkład w tych publikacjach.

Pozostałe komentarze

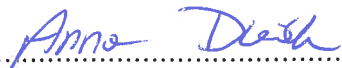
- Nienaturalnie brzmi, gdy Autor pisze o sobie w trzeciej osobie, np. „In this thesis, the author provided”(str. 9) oraz kilkakrotnie na str. 10.
- Czasami brak konsekwencji w oznaczeniach: Autor używa zamiennie „Spearman’s rho”, oraz „Spearman’s ρ ”.
- Literówki i drobne błędy językowe: „distribution witch location”(str. 24), „as a location parameter” zamiast „are a location parameter”(str. 29), w twierdzeniu 4.2.1 „i. e.”, „its infimum there is positive”(str.53), „and let $\alpha \in (0, 1)$.”(str. 64), „of an stable distribution”(str. 113).

- W twierdzeniu 4.1.3 powinno być jasno określone czy n jest ustalone, czy warunek zachodzi dla dowolnego n .
- W twierdzeniu 4.4.1 $q \in (0, 0.5)$, a nie $q \in (0, 5)$?
- W dowodzie twierdzenia 4.4.1 $Var(X|X < x)$ jest ściśle rosnąca czy malejąca?
- Str. 56: "In Section 4.3 we presented several equations for the quantile conditional variance, assuming that the equation, then knowing the value of the conditional covariance matrix for a single conditioning set, allows us to recover the underlying (or base) distribution." Niejasnym jest część zdania, tj. „assuming that the equation”.

Konkluzja

Uważam, że rozprawa zawiera nowe i interesujące wyniki dotyczące wykorzystania lokalnych charakterystyk warunkowych jako alternatywy dla klasycznych metod statystycznych. Podejście to umożliwia głębsze zrozumienie struktury zmiennych losowych w obszarach ich nietypowych zachowań oraz dostarcza narzędzi do analizy procesów, w których tradycyjne założenia o skończoności momentów nie są spełnione. Przedstawione wyniki świadczą o rzetelnym podejściu analitycznym Autora oraz o jego umiejętności sprawnego łączenia wyników teoretycznych z wymagającymi obliczeniami numerycznymi.

Nie mam wątpliwości, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim w dyscyplinie matematyka. Wnoszę o dopuszczenie mgr. Kewina Pączka do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.


.....
Anna Dudek