

Prof. dr hab. Ryszard Rudnicki
Instytut Matematyczny PAN
Oddział w Katowicach

Katowice, 26.01.2026 r.

Recenzja pracy doktorskiej mgr. Kewina Pączka
pt. *Statistical analysis based on quantile conditional moments*

I Struktura i tematyka rozprawy

Praca doktorska mgr. Kewina Pączka to mała monografia tematu licząca 158 stron, w której przedstawione są z dowodami wyniki z czterech współautorskich publikacji doktoranta oraz pokrewnych prac współpracowników. Oprócz tego opracowanie zawiera dość dokładne wprowadzenie w tematykę, szczegółowe porównanie prezentowanych wyników z innymi o zbliżonej tematyce, trzy dodatki z zebranymi pojęciami i wynikami z teorii prawdopodobieństwa i statystyki, indeks i literatura licząca blisko dwieście pozycji.

Praca składa się z siedmiu rozdziałów, z których pierwsze trzy to obszernie wprowadzenie zawierające m.in. motywacje prowadzonych badań, przedstawienie wyników doktoranta oraz podstawowe definicje i twierdzenia z teorii prawdopodobieństwa i statystyki niezbędne w dalszej części pracy. W rozdziale 4 przedstawione są twierdzenia dotyczące momentów warunkowych. Cytowane są w nim wraz z dowodami wyniki Jaworskiego i współpracowników charakteryzujące jednoznaczność rozkładów i niezależność zmiennych losowych za pomocą momentów warunkowych. W rozdziale tym pojawiają się również wyniki doktoranta. Są to na ogół uogólnienia wspomnianych rezultatów Jaworskiego *et al.* dotyczące rozkładów stabilnych, rozkładu t -Studenta i rozkładów eliptycznych oraz podrozdział poświęcony własnościom momentów warunkowych symetrycznych rozkładów stabilnych. Doktorant wyjaśnia również dlaczego statystyki oparte na momentach warunkowych są przydatne w przypadku rozkładów o nieokreślonych momentach wyższego rzędu, gdy zawodzą klasyczne metody i w ten sposób przechodzi do następnego rozdziału poświęconego statystyce. Punktem wyjścia są wyniki z pracy Jelito i Pitery dotyczące zgodności i asymptotycznej normalności. Doktorant uzyskuje dość zaawansowane uogólnienia tych wyników na macierze warunkowej korelacji oraz wyniki dotyczące statystyk N_1 i N_2 , w tym jeszcze nieopublikowane (Theorem 5.2.1). Doktorant bada również estymatory warunkowej funkcji autokorelacji oraz

podaje przykłady zastosowania estymatorów warunkowych w zarządzaniu ryzykiem. Kolejny rozdział poświęcony jest wnioskowaniu statystycznemu. Doktorant pokazuje przykłady wykorzystania statystyk opartych na momentach warunkowych. Szczególnie interesuje go estymacja parametrów przy założeniu, że próba jest albo z symetrycznego rozkładu stabilnego, lub jednostronnego rozkładu Lévy'ego. Bada również ważne własności używanych testów: siłę, odporność i dopasowanie modelu. Rozdział szósty to zastosowanie opracowanych metod statystycznych do analizy danych rzeczywistych z różnych dziedzin, takich jak rynki finansowe, fizyka plazmy, zbiorniki z materiałów kompozytowych oraz optymalizacja portfela. W ostatnim rozdziale podsumowuje wyniki rozprawy.

Jak wspomniałem rozprawa bazuje na czterech publikacjach z Damianem Jelito, Marcinem Piterą i Agnieszką Wyłomańską opublikowanych w *TEST*; *Journal of Applied Statistics*; *Journal of Computational and Applied Mathematics*; *arXiv*. Biorąc pod uwagę, że mgr Pączek figuruje jako pierwszy autor domyślam się, że jego wkład w powstanie tych prac jest znaczący.

II Opis używanych narzędzi matematycznych i uzyskanych wyników

Celem badań doktoranta było zastosowanie momentów warunkowych jako narzędzia do identyfikacji szerokiej klasy rozkładów prawdopodobieństwa. Aby zapewnić wiarygodność wnioskowania badał ich właściwości asymptotyczne. Ważną składową działalności doktoranta było sprawdzenie uzyskanych wyników na rzeczywistych zbiorach danych pochodzących z różnych dziedzin nauki.

Główne wyniki doktoranta to:

- estymacja indeksu stabilności symetrycznych rozkładów stabilnych,
- zbudowanie testów dopasowania dla jednostronnego rozkładu Lévy'ego opartych na kwantylowych momentach warunkowych,
- udowodnienie, że warunkowe korelacje na zbiorach indukowanych kwantylami mogą w pełni charakteryzować niezależność między zmiennymi losowymi,
- zastosowanie zasady 20/60/20 w matematyce finansowej.

W rozdziale 2 doktorant szczegółowo przedstawia własny wkład w cztery publikacje, na których oparta jest rozprawa doktorska. Nie mam wątpliwości, że jego wkład w ich przygotowanie jest kluczowy.

Doktorant używa w rozprawie różnorodnych narzędzi matematycznych i informatycznych. Dominują obiekty i twierdzenia z teorii prawdopodobieństwa. Pierwsza część rozprawy do rozdziału czwartego włącznie, wykorzystuje dość dobrze znane własności rozkładów oraz własności kopulek (w latach osiemdziesiątych spotkałem się z polskim

terminem "funkcja łącznikowa", które lepiej oddaje sens pojęcia). Znacznie bardziej zaawansowane narzędzia pojawiają się w rozdziale piątym. W dowodach zgodności i asymptotycznej normalności dla macierzy warunkowej korelacji oraz warunkowej funkcji autokorelacji doktorant korzysta z twierdzeń granicznych, ale dowody wymagają użycia zaawansowanych oszacowań. Kolejne dwa rozdziały wymagają użycia zaawansowanych pojęć i narzędzi statystyki matematycznej jak również użycia narzędzi informatycznych. W rozdziale 7 doktorant wykazał się umiejętnością użycia narzędzi statystycznych w konkretnych zagadnieniach aplikacyjnych.

III Ocena pracy i szczegółowe uwagi

Rozprawa doktorska jest bardzo dobrze zredagowana. Zawiera nowe i interesujące wyniki matematyczne. Ma również duże znaczenie ze względu na potencjalne zastosowania, niektóre z nich są w niej ładnie przedstawione. Warto podkreślić dużą dojrzałość doktoranta w kompleksowym opracowaniu tematu. Oprócz własnych rezultatów i wyników współpracowników, zamieścił w rozprawie szereg uwag o pokrewnych badaniach, dzięki którym pokazał znaczenie własnych rezultatów.

Główną trudnością jaką musiał pokonać doktorant, było przyswojenie zaawansowanej pojęciowo teorii i konieczność stosowania technik z różnych dziedzin matematyki i nauk pokrewnych. Rozumowania przedstawione w dowodach wymagają dużej umiejętności w operowaniu abstrakcyjnymi obiektami matematycznymi z teorii prawdopodobieństwa, statystyki i matematyki finansowej. Uważam, że badana tematyka jest nowoczesna, zaś rozprawa jest na bardzo dobrym poziomie i ma duży potencjał jeśli chodzi o kontynuowanie badań. Drobną słabością rozprawy jest fakt, że publikacje są współautorskie, ale w tego typu interdyscyplinarnej tematyce nie powinno to nikogo dziwić.

Rozprawa napisana jest dość starannie i nie zauważyłem poważniejszych błędów lub luk w rozumowaniach. Poniżej przedstawiam kilka uwag, które mogą być przydatne, przy ewentualnej publikacji rozprawy oraz kilka pytań, które nasunęły mi się podczas czytania rozprawy.

1. Linia 12_{6,5}: co oznacza stwierdzenie, że funkcja tworząca nie jest jedyna?
2. Linia 13⁵: zamiast „positive” powinno być „nonnegative”.
3. Czy we wzorze (3.4.11) zamiast p_2, q_2 nie powinno być p_d, q_d ?
4. W Twierdzeniu 4.4.1 powinno być $q \in (0, 0.5)$.
5. Linia 50₈: zamiast „strictly decreasing” powinno być „strictly increasing”, bo pochodna dodatnia.
6. Theorem 4.4.3: czy można wyznaczyć minimalną wartość ν_0 ? Jak q_ν zależy od ν ? Problem dualny: jak ν zależy od q_ν ?

7. Czy w Prop. 5.1.2 i 5.1.4 są jawne wzory na odchylenie standardowe w granicznym rozkładzie normalnym?
8. Błąd w wyróżnionym wzorze w Definition A.3.1.
9. Czasami obok siebie literka d jest używana jako wymiar przestrzeni i jako oznaczenie zbieżności względem rozkładu, np. w Theorem B.0.1.
10. Szkoda, że pewnych symboli brakuje w Indeksie i że nie ma numeru strony, gdzie są wprowadzone.
11. Czasami czytelnik ma kłopot, gdy używa się oznaczeń wprowadzonych dużo wcześniej. Warto przypominać je jeżeli definicja nie jest długa.

IV Podsumowanie

Uważam, że recenzowana rozprawa doktorska Kewina Pączka spełnia wszystkie **wymogi ustawowe**, m. in. stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego w rozumieniu Art. 187 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. „Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce”. Wnioskuje o dopuszczenie Kewina Pączka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

V Wyróżnienie

Bez wątpienia rozprawa wyróżnia się na tle innych rozpraw doktorskich bardzo dojrzałym monograficznym opracowaniem tematu. Jako osoba niezajmująca się bezpośrednio statystyką matematyczną, nie jestem w stanie stwierdzić jak duże znaczenie dla rozwoju tej dziedziny mają wyniki uzyskane przez doktoranta, ale chętnie poprzę wniosek o wyróżnienie rozprawy, jeżeli zostanie zgłoszony przez recenzenta – specjalistę z tej dziedziny. Zrobię to również dlatego bo uważam, że statystyka matematyczna jest zaniedbywana w polskim środowisku matematycznym i brakuje młodych specjalistów z tej dziedziny. Wyróżnienie rozprawy ze statystyki matematycznej mogłoby pomóc w jej promocji.



Prof. dr hab. Ryszard Rudnicki