

Prof. Tomasz Downarowicz
Wydział Matematyki
Katedra Matematyki
Politechnika Wrocławska
ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław

Galowice, 16 września 2026

R E C E N Z J A

rozprawy doktorskiej mgr. **Przemysława Kucharskiego**
zatytułowanej *Models of dynamical systems based on first return maps*

Recenzję sporządzono na zlecenie Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

Podstawa prawna postępowania i kryteria oceny

Postępowanie w sprawie nadania stopnia doktora prowadzone jest na podstawie przepisów ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U. z 2018 r. poz. 1668, z późn. zm.), w brzmieniu obowiązującym w dniu wszczęcia postępowania, a także przepisów wykonawczych wydanych na podstawie tej ustawy oraz właściwych regulacji wewnętrznych podmiotu doktoryzującego.

Zgodnie z art. 187 ustawy – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, rozprawa doktorska powinna prezentować ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w dyscyplinie albo dyscyplinach oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej. Przedmiotem rozprawy doktorskiej powinno być oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, oryginalne rozwiązanie w zakresie zastosowania wyników własnych badań naukowych w sferze gospodarczej lub społecznej albo oryginalne dokonanie artystyczne.

Przy ocenie rozprawy doktorskiej należy zatem w szczególności uwzględnić: oryginalność i naukową wartość podjętego problemu, poprawność zastosowanych metod badawczych, stopień samodzielności autora, poziom merytoryczny uzyskanych wyników oraz ich znaczenie dla rozwoju danej dyscypliny naukowej. Ocenie podlega również sposób przedstawienia wyników, poprawność argumentacji oraz stopień, w jakim rozprawa potwierdza posiadanie przez kandydata kompetencji wymaganych od osoby ubiegającej się o stopień doktora.

W dalszej części recenzji przedstawiam ocenę rozprawy doktorskiej z uwzględnieniem powyższych wymogów ustawowych oraz kryteriów przyjętych w obowiązujących w postępowaniu regulacjach.

Formalną ocenę rozprawy stanowią odpowiedzi na cztery wyszczególnione w ustawie pytania, z których pierwsze jest czysto techniczne i dotyczy formy (pisemnej monografii lub zestawu artykułów), a kolejne trzy mają na celu ustalenie, skróto-wo rzecz ujmując, czy rozprawa świadczy o ogólnej wiedzy teoretycznej kandydata w dyscyplinie, umiejętności samodzielnego prowadzenia badań naukowych, oraz czy rozprawa zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. **Na wszystkie te**

pytania moja odpowiedź jest twierdząca. Ponadto, zgodnie z przysługującym mi prawem, będę wnioskował o wyróżnienie rozprawy. Odpowiedź na pierwsze pytanie oraz uzasadnienie twierdzących odpowiedzi na dalsze trzy oraz wniosku o wyróżnienie są zawarte w omówieniu wyników naukowych prezentowanych w rozprawie, które przedstawiam poniżej.

Omówienie rozprawy wraz z uzasadnieniem oceny

Przedłożona mi do recenzji rozprawa została napisana pod kierunkiem promotora dr. hab. Jana Borońskiego, prof. UJ. Rozprawa ma formę pracy pisemnej (ponad 100-stronicowej monografii) w języku angielskim. Praca oparta jest na trzech publikacjach (w tym dwóch samodzielnych i jednej współautorskiej) oraz dwóch samodzielnych artykułach będących w fazie przygotowania (jeden z nich jest już dostępny na ArXiv). Moja recenzja napisana jest w języku polskim, jednak ze względu na nieściśłości, jakie mogłyby wystąpić w wyniku tłumaczenia, niektóre terminy matematyczne przytaczam w oryginalnym angielskim brzmieniu.

Praca składa się z trzech tematycznie odrębnych części:

1. *Strange attractors for perturbations of unimodal maps*,
2. *Inverse limit models of dynamical systems*, oraz
3. *Multiple mixing for time-changes of parabolic flows on n -torus*.

Wspólnym motywem przewodnim jest interpretacja wszystkich tych tematów jako zastosowań „odwzorowań bazujących na czasie pierwszego powrotu”, czyli tzw. odwzorowań indukowanych na podzbiorze. W pierwszym i trzecim rozdziale istotne jest pojęcie renormalizacji, która polega na zmianie funkcji czasu powrotu nad przekształceniem pierwszego powrotu do odpowiednio zdefiniowanego obszaru (w rozdziale pierwszym jest to renormalizacja wprowadzona przez Dyi-Shing Ou dla rodziny Loziego w 2022 r., w rozdziale trzecim jest to renormalizacja uzyskana poprzez wymianę funkcji dachowej w potoku specjalnym). W rozdziale drugim skupiamy się na modelach otrzymanych techniką granicy wstecznej. W końcowej części pojawiają się wieże Kakutaniego–Rochlina, gdzie w naturalny sposób ważną rolę odgrywają czasy powrotu do sumy baz wież, jednak wieżom Kakutaniego–Rochlina poświęcony jest jedynie dwustronicowy dodatek do dwudziestostronicowego rozdziału. Oceniam, że strony te pełnią rolę klamry tematycznej mającej powiązać ten rozdział z pozostałymi. Rozdział trzeci, jak już wspominałem, dotyczy potoków specjalnych. Są to potoki nad obrotami torusa, a celem jest konstrukcja potoków wykazujących mieszanie wszystkich rzędów. Dla potoku specjalnego odwzorowanie w bazie jest tożsame z odwzorowaniem pierwszego powrotu, jednak kolejność tworzenia jest tutaj odwrotna, to znaczy przekształcenie w bazie jest na ogół zadane z góry, przed utworzeniem potoku specjalnego (w tym przypadku jest to odwzorowanie liniowe na torusie), i nie jest ono definiowane jako efekt zastosowania odwzorowania pierwszego powrotu we wcześniej zadanym potoku. Tak więc obecność odwzorowania indukowanego istnieje, ale nie jest tu kluczowa.

Pomimo pewnej sztuczności utworzonej przez autora klamry tematycznej, ponieważ zrozumiałej dla uzyskania spójności całości rozprawy, każdy z rozdziałów stanowi ciekawą i wartościową całość, którą można rozważać zupełnie niezależnie od pozostałych rozdziałów.

Rozdział pierwszy poświęcony jest badaniu własności atraktorów pewnej klasy perturbacji odwzorowań unimodalnych płaszczyzny. Startuje się od jednoparametrycznej

rodziny odwzorowań unimodalnych $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, następnie dokłada się jeszcze jeden parametr b i konstruuje się rodzinę odwzorowań $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spełniającą warunki $f_{a,0}(x,y) = (f_a(x), 0)$ oraz $\|f_{a,b}(x,y) - f_{a,0}(x,y)\|_{C^1} < Cb$ na każdym zwartym zbiorze $K \subset \mathbb{R}^2$. Ponadto od rodziny $f_{a,b}$ wymaga się gładkiej zależności od parametrów, a na funkcje f_a nałożone są pewne techniczne warunki dotyczące wykładniczego wzrostu pochodnych kolejnych iteracji poza punktem krytycznym. Jeśli warunki te są spełnione, to mówimy o *piecewise hyperbolic admissible family of perturbations of unimodal planar maps*. Szczegóły definicji oczywiście pomijam. Istotne jest to, że do klasy tej należą wcześniej badane *border-collision normal forms*, rodziny typu Loziego, rodzina odwzorowań Hénona i jeszcze kilka innych. Pierwszy najważniejszy wynik (Twierdzenie A) mówi, że dla przekształcenia z takiej rodziny zbiór $CLW_{z_+}^u$ (czyli domknięcie rozmaitości niestabilnej prawego punktu stałego) jest atraktorem chaotycznym (tzn. wykazuje chaos Devaney’a: tranzytywność, wrażliwość na warunki początkowe oraz gęstość punktów okresowych). Jest to uogólnienie wyników uzyskanych dla odwzorowań typu Loziego przez Misiurewicza i Štimaca z 2018 roku oraz dla *border-collision normal forms* przez Glendinninga i Simpsona z roku 2021. Kluczowa jest przy tym metoda renormalizacji wprowadzona przez Dyi-Shinga Ou z roku 2022 oraz jej uogólnienie na rodziny dopuszczalne. Drugie ważne twierdzenie (Twierdzenie B) mówi, że przy nieco słabszych założeniach (osłabia się hiperboliczność), dla parametrów w pobliżu *homoclinic tangency* jednego z punktów stałych występuje atraktor maksymalny (tzn. będący przekrojem iteracji swojego basenu przyciągania). Twierdzenie to uogólnia wynik Viany z 1996 roku w przypadku rodzin odwzorowań typu Hénona oraz – w przypadku rodzin typu Loziego – wyniki Cao i Liu [14] z 1998 roku jak i niedawny wynik doktoranta, czy wreszcie wyniki z cytowanej już pracy Glendinninga i Simpsona dla *border-collision normal forms*. Dodatkowo, jeśli założymy *piecewise hyperbolicity* oraz *high expansion*, to atraktor ten będzie *strange* (czyli chaotyczny i dodatkowo posiadać będzie dodatni wykładnik Lapunowa) i zależny w sposób ciągły (w metryce Hausdorffa) od parametrów. Pominę opis procedury renormalizacji wzorowanej na konstrukcji Dyi-Shing Ou. Jest ona mocno zaawansowana i bazuje na serii technicznych lematów prowadzących do wyizolowania odpowiedniego obszaru, na którym następnie rozważane jest odwzorowanie pierwszego powrotu. Zabieg ten pozwala zidentyfikować basen przyciągania atraktora zarówno w przypadku zachowującym, jak i odwracającym orientację. Opisany jest też geometryczny warunek na maksymalność atraktora, który następnie zastosowany jest do badanej rodziny dopuszczalnej.

Cały rozdział zajmuje 36 stron i bazuje na dwóch samodzielnych artykułach: jednym opublikowanym w czasopiśmie *Chaos*, i jednym na razie dostępnym tylko na ArXiv. Przedstawione dowody wymagają szerokiej wiedzy z zakresu dynamiki hiperbolicznej, są niezwykle skomplikowane i zaawansowane technicznie. Niemniej jednak sposób ich przedstawienia jest klarowny i umożliwia śledzenie wszystkich etapów rozumowania. Uzyskane twierdzenia w istotny sposób uogólniają znane wcześniej wyniki na szerszą klasę rodzin odwzorowań. Uważam, że rozdział ten świadczy o dużej dojrzałości naukowej i samodzielności kandydata.

Przejdę teraz do omówienia rozdziału drugiego. Tematycznie jest on bardzo odległy od poprzedniego, dotyczy bowiem dynamiki zerowymiarowej, gdzie pojęcie gładkości odwzorowania raczej nie występuje. Rozdział ten bazuje na pracach kandydata opublikowanych w *Fundamenta Mathematicae* (wspólna z promotorem) oraz *Topology and its Applications* (samodzielna). Rozdział ten w znacznej części ma charakter zbliżony do pracy przeglądowej. Opisane są w nim znane z wcześniejszej literatu-

ry techniki granic wstecznych pokryw grafowych *inverse limits of graph covers*, wież Kakutaniego-Rochlina oraz diagramów Brattego-Wierszyka. Pokrycia grafowe wprowadzili Gambaudo i Martens w 2006 roku do konstrukcji układów zerowymiarowych realizujących konkretne simpleksy Choqueta miar niezmienniczych. Technika ta była później rozwijana przez Shimomurę w 2014 r. i jeszcze kilku autorów do różnych celów. Pokrycie grafowe jest to odwzorowanie pomiędzy grafami skończonymi, które zachowuje relację połączenia wierzchołków krawędziami, dodatkowo jest surowym na krawędziach, oraz skleja krawędzie o wspólnym początku (czyli jest *positive directional*). Jeśli mamy do czynienia z ciągiem grafów $G_1, G_2, \dots$ oraz dla każdego $i \in \mathbb{N}$ mamy pokrycie grafowe $\phi_i : G_i \rightarrow G_{i-1}$, to możemy zdefiniować granicę wsteczną takich pokryw. Shimomura pokazał, że w ten sposób można opisać wszystkie układy zerowymiarowe. Autor rozprawy definiuje dodatkowo pojęcie *inverse limit of twinned graph homomorphisms*, polegające na wprowadzeniu w każdym z grafów G_i dodatkowej struktury F_i (nieskierownych) krawędzi spełniającej pewne warunki zgodności ze strukturą G_i oraz z odwzorowaniami ϕ_i . Otrzymujemy coś, co autor nazywa *inverse sequence of twinned graph homomorphisms*. Z oczywistych powodów pominię szczegółów technicznych. Dzieląc granicę wsteczną grafów G_i przez relację zależną od struktury krawędzi F_i otrzymujemy układ dynamiczny, który już niekoniecznie jest zerowymiarowy. Kluczowe twierdzenie tego rozdziału (Twierdzenie 2.4.4.) mówi, że każdy układ dynamiczny (odwzorowanie ciągłe na zwartej przestrzeni metrycznej) jest sprzężone z układem powstałym w opisany wyżej sposób z jakiegoś *inverse limit of twinned graph homomorphisms*. Jest to niezwykle ciekawe twierdzenie, pozwalające kodować dowolne układy (w tym spójne) poprzez techniki zerowymiarowe. Jednak, jak autor sam przyznaje, taki sposób modelowania wydaje się trudny do zastosowania w konkretnych przykładach układów dynamicznych, a przez to może okazać się mało efektywny. Niemniej jednak sam pomysł jest godny uwagi, a potencjał jego możliwości może dopiero wypłynąć w przyszłych badaniach. W dalszej części rozdziału autor powraca do pokryw grafowych i modelowanych przez nie układów zerowymiarowych. Do oryginalnego wkładu autora można zaliczyć nowe kryteria dla pewnych standardowych własności topologicznych wyrażone w języku własności grafów użytych do konstrukcji danego układu. Nie są to zaskakujące wyniki, ale cenne obserwacje, gdy w grę wchodzi układy konstruowane właśnie w ten sposób (jako granice wsteczne pokryw grafowych). Przykładowo, Twierdzenie 2.5.3. w punkcie 1. mówi, że układ jest łańcuchowo tranzytywny, wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie grafy G_i są spójne. Nieco bardziej skomplikowanymi warunkami uwzględniającymi pętle w grafach wyrażone są w punktach 2., 3. i 4. własności tranzytywności, minimalności oraz monoergodyczności, a w twierdzeniach 2.5.6. i 2.5.9. podano odpowiednio kryteria jednostajnej sztywności i liniowego powracania. Końcowe strony rozdziału poświęcone są wieżom Kakutaniego-Rochlina i diagramom Brattego-Wierszyka oraz ich związkom z pokryciami grafowymi.

Rozdział ten oceniam jako interesujący, choć nie przełomowy. W zestawieniu z rozdziałem pierwszym stanowi on dowód na zaskakująco szeroki horyzont zainteresowań kandydata, bowiem wkracza on w dość odległy obszar w teorii układów dynamicznych. Rozdział napisany jest, podobnie jak poprzedni, z dbałością o poprawność i komunikatywność uzyskane poprzez system szczegółowych odnośników do poprzednio wprowadzonych pojęć lub wyprowadzonych zależności.

W rozdziale trzecim autor zajmuje się mieszaniem wyższych rzędów dla potoków specjalnych nad układami parabolicznymi na torusie. Jest to najdłuższy rozdział rozprawy, liczący ponad 40 stron. Głównym celem jest wykazanie, że pewne potoki, o

których wiadomo było, że są mieszające, są de facto mieszające wszystkich rzędów. Trudno powiedzieć, że przybliżyła to nas do pozytywnej odpowiedzi na słynny problem Rochlina (czy mieszanie implikuje mieszanie wyższych rzędów), jest to jednak krok w kierunku utwierdzenia się w przekonaniu, że odpowiedź może być pozytywna przynajmniej w jeszcze jednej klasie układów (w tym wypadku potoków). Technicznie rzecz ujmując, potok na torusie n -wymiarowym reprezentuje się najpierw jako potok specjalny nad torusem wymiaru $n - 1$ (na którym działa bądź obrót niewymierny, bądź, w przypadku nil-potoku Heisenberga „obróć skośny”) ze stałą funkcją dachową. Następnie zmienia się funkcję dachową na niestałą, co może być interpretowane jako renormalizacja potoku (zmiana prędkości przepływu z jednostajnej na niejednostajną). Nie zmienia się przy tym przekształcenie bazowe (czyli indukowane pierwszego powrotu) na torusie wymiaru $n - 1$, więc w tym miejscu nawiązujemy do tytułowego tematu rozprawy. Ale, jak już wspomniałem, jest to powiązanie raczej o charakterze formalnym, gdyż główną rolę w dalszych rozważaniach odgrywa technika wprowadzona przez Kanigowskiego i Ravotti w pracy z 2024 roku, w której dowodzą oni, że potok spełniający pewien techniczny warunek na rozciąganie tzw. prawie-rozbić (*locally uniformly shearing, LUS*), jeśli jest mieszający, to jest mieszający wszystkich rzędów. Tak więc praca w dalszej części koncentruje się na konstrukcji potoków specjalnych nad przekształceniem torusa $n - 1$ -wymiarowego, które posiada własność LUS (a właściwie nieco silniejszy warunek nazwany przez Kanigowskiego i Ravotti *good special flow*). Do uzyskania mieszania zastosowano techniki pochodzące z prac Yoccoza z 1995 roku oraz Fayada z roku 2002. Dwa główne twierdzenia dotyczą przypadku, gdy w bazie mamy albo przesunięcie niewymierne (czyli o wektor o współrzędnych niezależnych nad $\mathbb{Q}$), albo obrót skośny typu Anosowa $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + x + \beta)$. Odpowiednie twierdzenia mają następującą postać: dla każdego obrotu torusa wymiaru $n \geq 3$ takiego, że kąt obrotu spełnia pewien, nazwijmy to „wzmocniony warunek niewymierności Yoccoza” (potrzebny do uzyskania mieszania), istnieje analityczna renormalizacja (czyli de facto analityczna funkcja dachowa nad indukowanym przekształceniem torusa wymiaru $n - 1$), która daje mieszanie wszystkich rzędów. Dla nil-potoku Heisenberga twierdzenie gwarantuje nieco więcej niż samo istnienie jednego potoku, mówi ono o istnieniu pewnej podprzestrzeni w $C^\infty(M)$ przeliczalnego kowymiaru (gdzie M jest nil-rozmaitością Heisenberga), takiej, że dla każdej funkcji dachowej spoza tej podprzestrzeni odpowiedni potok specjalny, o ile jest monoergodyczny, to jest mieszający wszystkich rzędów. Oczywiście w tym omówieniu pominąłem wiele stosowanych narzędzi, na przykład szybkość aproksymacji i nierówność Denjoy-Koksmy, która ingeruje w warunku Yoccoza (a właściwie jej niespełnienie w wyższych wymiarach, które pozwala uzyskać jednocześnie analityczność renormalizacji i mieszanie), i kilka innych, świadczących o szerokiej wiedzy kandydata w wielu przenikających się działach matematyki.

Wyniki tego rozdziału, choć, jak już napisałem, nie zbliżają nas w istotny sposób do rozwiązania jakiegoś znanego otwartego problemu, są w pełni oryginalne i stanowią popis opanowania trudnych technicznie metod oraz dojrzałości naukowej kandydata pozwalającej mu nawiązać dialog z najmocniejszymi współczesnymi matematykami uprawiającymi teorię układów dynamicznych.

W trakcie lektury dostrzegłem i zaznaczyłem kilkadziesiąt drobnych pomyłek i literówek. Nie mają one wpływu na moją ocenę merytoryczną. Ich listę przytaczam w formie załącznika – do wykorzystania w przyszłych publikacjach.

Podsumowując, rozprawa jest świadectwem niezwykle rozległego obszaru zainte-

resowań badawczych doktoranta, od układów hiperbolicznych na płaszczyźnie czy też powierzchniach gładkich, poprzez dynamikę symboliczną i zerowymiarową, po potoki specjalne. Interesują go atraktory maksymalne i chaotyczne, pojęcia z dynamiki topologicznej jak łańcuchowa tranzytywność, jednostajna sztywność, kodowanie dowolnych układów topologicznych w języku pokryć grafowych, własność mieszania, mieszanie wyższych rzędów, hipoteza Rochlina i wiele innych. To wyjątkowo bogate zestawienie, zwłaszcza, jeśli się weźmie pod uwagę wczesny etap kariery naukowej. Rozprawa jest manifestacją szerokiej i rzetelnej wiedzy i doskonałej orientacji w literaturze. Uzyskane wyniki są oryginalne (choć może jeszcze nie przełomowe, gdyż na ogół są to uogólnienia wyników uzyskanych przez innych autorów). Kandydat swobodnie posługuje się różnymi technikami stosowanymi w teorii układów dynamicznych i potrafi nietrywialnie je modyfikować, dostosowując do swoich potrzeb. Wszystko to dowodzi dojrzałości naukowej pozwalającej nawiązać kontakt, a w niedalekiej przyszłości współpracę, z wiodącymi autorytetami w wielu modnych kierunkach badań. Mówiąc krótko, w mojej opinii **przedstawiona rozprawa spełnia wszelkie zwyczajowe i ustawowe wymogi stawiane pracom doktorskim**. Moje pozytywne odpowiedzi na obowiązkowe pytania w recenzji zostały powyżej uzasadnione w sposób, mam nadzieję, niebudzący wątpliwości.

Ponadto, mając na uwadze bardzo wysoki poziom naukowy rozprawy oraz fakt spełniania wymogów z dużą nawiązką, **stawiam formalny wniosek o wyróżnienie rozprawy**. Tym stwierdzeniem kończę recenzję.



Tomasz Downarowicz

Załączniki:

1. Lista dostrzeżonych literówek

Załącznik nr 1.

Lista dostrzeżonych literówek

- Str. 17, wiersz -13: jest $\text{Int } C_{\rho,x}^u$, ma być $\text{Int } C_{\rho,x}^s$
- Str. 18, wiersz 6: jest follow, ma być it follows
- Str. 18, wiersz 13: jest $d(g^n(z), g^n(p))$ ma być $\text{dist}(g^n(z), g^n(p))$ (podobnie w wierszu 14)
- Str. 18, wiersz 19: jest $\bigcup_{i \geq 0}$ ma być $\bigcup_{n \geq 0}$ (dwa razy)
- Str. 20, wiersz 14: jest $f_{a,b}$ ma być $f_{a,0}$
- Str. 21, wiersz 6: jest $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ma być $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- Str. 30, wiersz 6: jest manifolds, ma być manifold
- Str. 34, wiersz 1 (podpis pod rysunkiem): jest first n -th return, ma być albo first albo n th
- Str. 41, wiersz -9: jest $B_\epsilon(G_p)^C$ Brak nawiasu – nie jest jasne, czy to jest dopełnienie kuli, czy kula wokół dopełnienia.
- Str. 41 i 42, cały lemat 1.6.8: (to jest jedyna uwaga merytoryczna) Ten lemat jest standardowy. Nie ma potrzeby zakładać, że G_p^n jest gładką krzywą (nota bene słowa “images of” w założeniach są zbędne). Wystarczy, że są to zbiory zwarte. Ze wzoru (1.19), funkcja $p \mapsto A_p$ jest infimum (w sensie przekroju) funkcji ciągłych $p \mapsto F_p^n$ i supremum funkcji ciągłych $p \mapsto G_p^n$. Zatem jest to funkcja zarówno górnio jak i dolnio półciągła, czyli ciągła.
- Str. 48, wiersz 12: jest homeomorphism, ma być homomorphism
- Str. 49, wiersz -14: jest $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ is induced by the inclusion, if $\phi(V) \subset U$, prawdopodobnie miało być $\phi(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{U}$ is induced by the inclusion, if $V \subset \phi(V)$ for all $V \in \mathcal{V}$
- Str. 49, wiersz -12: jest partitions, ma być refining partitions (poza tym brak odnośnika – czyje to twierdzenie)
- Str. 55, wiersz 7: Może warto przypomnieć, że grafy są z założenia skończone, więc to założenie implikuje istnienie pętli.
- Str. 56, wiersz 12: jest $\prod_{i \geq 0}$ ma być $\prod_{n \geq 0}$
- Str. 57, wiersz 1: jest $\pi_n(\gamma) = \gamma'_1 \dots \gamma'_\ell$ Obraz krawędzi jest tu ścieżką, co przeczy wcześniejszym założeniom.
- Str. 57, drugi akapit: To wyjaśnienie powinno być dane wcześniej. Bez niego poprzedni akapit jest niezrozumiały.
- Str. 57, wiersze 20 i 21: jest single vertex with two directed loops γ_n and γ'_n Wcześniej powiedziano, że różne krawędzie o wspólnym początku i wspólnym końcu są zabronione.
- Str. 57, wiersz -6: jest $\#\{\text{appearances of } \gamma' \text{ in } \pi_n(\gamma)\}$ To jest mylące. Homomorfizm grafowy przeprowadza krawędzie na krawędzie, a nie na ścieżki. Ewidentnie to jest jednak dopuszczone dla *weighted graph covers*. Tez szczegół powinien być wyjaśniony wcześniej.
- Str. 71, wiersz 9: jest time-change, ma być time-changes
- Str. 72, wiersz -7: jest $(\beta_r, \beta'_r) \in Y$ To jest zupełnie niejasne w tym miejscu, zanim pojawią się odpowiednie wyjaśnienia.
- Str. 77, wiersz -5: jest increasing sequence, ma być increasing sequence of integers
- Str. 78, wiersz 10: jest M_s^a Albo to oznaczenie nie było zdefiniowane, albo było zbyt dawno.

Str. 78, wiersz 13: jest K_ϵ Czy to jest to samo co K_δ dla ϵ zamiast δ ?
Str. 79, wiersz 12: Należy wspomnieć, że ϵ jest wcześniej ustalony.
Str. 79, wiersz 19: jest $f_{t_{i_a}}(x_a, 0)$ Na jakim zbiorze jest tym razem zdefiniowane f_t ?
Str. 83, wiersz -9: jest $\sup_{[a,b]} g - \inf_{[a,b]}(g)$, ma być $\sup_{[a,b]}(g) - \inf_{[a,b]}(g)$
Str. 93, wiersz 6: jest satisfy, ma być satisfies
Str. 102, wiersz -1 jest Corollat, ma być Corollary

Koniec

