

dr hab. Joanna Kułaga-Przymus, prof. UMK
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 17 września 2026 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej

Przemysław Kucharskiego

„Models of dynamical systems based on first return maps”

Rozprawa doktorska Przemysław Kucharskiego dotyczy kilku dość różnych klas układów dynamicznych i łączy zagadnienia z dynamiki gładkiej, topologicznej i ergodycznej. Poszczególne rozdziały mają w dużej mierze niezależny charakter, ale spina je wspólny motyw wykorzystywania konstrukcji opartych na odwzorowaniach pierwszego powrotu do modelowania i analizy dynamiki. Praca jest przez to szeroka tematycznie i technicznie wymagająca; w mojej ocenie właśnie ta różnorodność problemów i stosowanych metod jest jedną z jej mocnych stron.

W Rozdziale 1 autor bada własności chaotyczne dwuwymiarowych zaburzeń odwzorowań unimodalnych. Bez wchodzenia w techniczne szczegóły, są tu rozpatrywane dwa główne problemy. Twierdzenie A dotyczy istnienia chaotycznego atraktora i własności dynamiki na tym zbiorze. Bardziej subtelne twierdzenie B dotyczy natomiast tego, czy ten naturalny kandydat na atraktor jest maksymalnym zbiorem niezmienniczym w odpowiednim otoczeniu, a więc całym lokalnym atraktorem.

Kontekst, w którym sformułowane są te wyniki, obejmuje i uogólnia kilka sytuacji obecnych wcześniej w literaturze: rodziny form normalnych zderzeń granicznych (*border-collision normal forms*), rodziny typu Loziego i Hénona, a także pewne zaburzenia odwzorowań Misiurewicza czy rodziny typu Wang–Younga. Układy spełniające odpowiedni zestaw założeń autor nazywa rodzinami dopuszczalnymi.

Twierdzenie A pokazuje, że przy silniejszych założeniach naturalny kandydat na atraktor ma chaotyczną dynamikę, w szczególności otrzymuje się mieszanie oraz gęstość punktów okresowych. Dla wielu klasycznych rodzin sam fakt występowania takiej dynamiki był już wcześniej znany, a nowość wyniku polega przede wszystkim na ujęciu tych rezultatów w jednym, bardziej ogólnym schemacie.

Twierdzenie B dotyczy bardziej delikatnego problemu maksymalności atraktora. Do jego rozwiązania autor wykorzystuje model renormalizacyjny oparty na odwzorowaniu pierwszego powrotu. Dla rodziny Loziego podobne zjawisko było już znane z wcześniejszej opublikowanej pracy autora (która jest, obok drugiej pracy w przygotowaniu, bazą tego rozdziału), a dla rodzin Hénona istniały wcześniejsze wyniki szczególne. Istotną nowością rozdziału jest proponowane rozszerzenie tego mechanizmu na znacznie szerszą klasę rodzin dopuszczalnych.

To właśnie w tej części najlepiej widać związek rozdziału z głównym motywem całej rozprawy. W § 1.5 autor konstruuje model renormalizacyjny oparty na odwzorowaniu pierwszego powrotu, a w § 1.6 wykorzystuje jego geometrię do analizy maksymalności atraktora. Idea wykorzystania w tym kontekście modelu renormalizacyjnego opartego na powrotach do odpowiednio wybranego obszaru pochodzi z wcześniejszej pracy Ou i pojawia się również w artykule kandydata dotyczącym rodziny Loziego. W przypadku zachowującym orientację dowód Twierdzenia B rozdziela analizę orbit omijających otoczenie zbioru krytycznego od tych, które do niego wchodzą. Dodatkowo autor wykazał ciągłość badanych atraktorów w metryce Hausdorffa.

Są to bez wątpienia wyniki ciekawe i, w mojej ocenie, godne publikacji. Sam rozdział jest jednak napisany dość hermetycznie, bardziej jak artykuł badawczy niż rozprawa doktorska. W szczególności, skoro autor wielokrotnie podkreśla, że otrzymane wyniki uogólniają wcześniejsze rezultaty, zdecydowanie warto byłoby

choć krótko przywołać założenia i wnioski tych wcześniejszych twierdzeń. W obecnej wersji sprawdzenie, na czym dokładnie polega uogólnienie i co jest rzeczywiście nowe, wymaga od czytelnika samodzielnego i dość żmudnego porównywania kolejnych prac.

Podobny problem pojawia się przy definicji rodzin dopuszczalnych. Autor ogranicza się do stwierdzenia, że “similar definition can be found in [69]”, a następnie wprowadza warunki (A1)–(A3), następnie mocniejsze założenie (A3H), dodatkowy warunek wysokiej ekspansji (A3E) oraz (B1)–(B3). W moim odczuciu relacja pomiędzy (A3H) i (A3) została opisana zbyt krótko. Dodatkowo sama definicja 1.3.4 nie jest w pełni spójna z dalszą częścią tekstu: wymienione są w niej warunki (A1)–(A2) oraz (B1)–(B3), natomiast (A3) zostaje pominięte, choć bezpośrednio później autor ustala stałe związane z (A3) i korzysta z tego założenia w dalszych argumentach. Domyślam się, że są to kwestie czysto redakcyjne, ale nie ułatwiają one lektury.

Kluczowy lemat 1.3.9 również wymagałby, moim zdaniem, staranniejszego sformułowania i przedstawienia dowodu. W szczególności w przedstawionym dowodzie nie widać jasno, w jaki sposób stała c_2 miałyby zostać wybrana niezależnie od δ , czego wymaga sformułowana teza. Nie jest to wyłącznie kwestia kosmetyczna, ponieważ dalsze części rozdziału odwołują się do tego lematu, bezpośrednio lub poprzez stwierdzenie 1.3.11, w szczególności w lemacie 1.3.16. Ten fragment wymaga więc poprawienia i dokładnego uporządkowania zależności pomiędzy parametrami. Istotne jest przy tym sprawdzenie, czy problem dotyczy jedynie sformułowania i organizacji dowodu, czy też wymaga dodatkowego założenia albo osłabienia zakresu Twierdzeń A i B oraz tych elementów konstrukcji renormalizacyjnej, które korzystają z Lematu 1.3.9.

Jednocześnie nawet gdyby ostatecznie okazało się, że przejście od rodziny Loziego do całej klasy rodzin dopuszczalnych wymaga jakiegoś dodatkowego założenia albo nieco słabszego sformułowania, nie podważałoby to, moim zdaniem, wartości naukowej całego rozdziału. Już sam wcześniej opublikowany wynik dotyczący maksymalności atraktora dla rodziny Loziego, uzyskany za pomocą odrębnego dowodu opartego na analizie odwzorowania pierwszego powrotu, stanowi wystarczająco bogaty i nietrywialny materiał na solidny rozdział rozprawy doktorskiej.

Na pochwałę zasługują kolorowe rysunki. Przy tak geometrycznym charakterze argumentów są one naprawdę potrzebne; bez nich lektura tego rozdziału, zwłaszcza przez osobę niebędącą specjalistą w dynamice hiperbolicznej, byłaby miejscami bardzo trudna.

Rozdział 2 dotyczy przede wszystkim pokryć grafowych jako sposobu kodowania dynamiki. Zasadniczy wkład obejmuje:

- uogólnienie standardowej tego typu konstrukcji w § 2.4 na sytuację ogólną (standardowo robi się to w przypadku układów topologicznych zerowymiarowych),
- grafowe charakteryzacje wybranych własności dynamicznych układów Cantora w § 2.5
- opis przejść między pokryciami grafowymi a diagramami Bratteli–Vershika w § 2.7.

W szczególności, okazuje się, że pewne własności układu można odczytywać bezpośrednio z kombinatoryki odpowiadających mu grafów. Związek z motywem przewodnim rozprawy, czyli odwzorowaniami pierwszego powrotu, pojawia się poprzez wieże Kakutaniego–Rokhlina: wysokość wieży jest czasem powrotu do bazy, który w reprezentacji grafowej odpowiada długości odpowiedniej ścieżki, a w modelu ważonym może być kodowany wagą krawędzi.

Punktem wyjścia jest klasyczna charakterystyka układów zero-wymiarowych przez granice odwrotne pokryć grafowych. Autor zaznacza, że korzysta z “nieco rozszerzonej wersji” [57, Lem. 3.5], ale nie wyjaśnia, na czym dokładnie to rozszerzenie polega. Na potrzeby dalszej lektury i oceny tego rozdziału przyjmuję tę charakterystykę jako standardowy punkt wyjścia. W § 2.4 autor wprowadza, obok grafów dynamiki (G_i) , dodatkowe grafy (F_i) , które kodują nakładanie się elementów pokryć otwartych i pozwalają przejść poza przypadek zero-wymiarowy. Sama idea tej konstrukcji jest naturalna: dodatkowy graf ma pamiętać relacje pomiędzy elementami pokrycia, których nie można już rozdzielić za pomocą partycji na zbiory domknięto-otwarte. W warunkach (DS4) i (DS5), a także w odpowiadającym im miejscu dowodu Twierdzenia 2.4.3, wydaje się, że $(E(F_i))$ powinno zostać zastąpione przez $(E(F_{i-1}))$, ponieważ obrazy przez (ϕ_i) należą do poziomu $i - 1$.

W Sekcji 2.5 autor przedstawia, między innymi, wyniki pochodzące ze współautorskiej pracy J. Borońskiego,

H. Bruina i P. Kucharskiego, przekładające wybrane własności dynamiczne układów Cantora na warunki kombinatoryczne dotyczące odpowiadających im pokryć grafowych. Za szczególnie interesujący uważam wynik dotyczący jednostajnej sztywności (Twierdzenie 2.5.6), z którego wynika, że tranzytywny jednostajnie sztywny układ Cantora jest ometrem. Tego typu wyniki dobrze pokazują sens stosowania pokryć grafowych: własność dynamiczna układu zostaje zastąpiona warunkiem dotyczącym skończonych obiektów kombinatorycznych.

Sekcja 2.6 pełni przede wszystkim rolę pomostu pomiędzy rozbiciami Kakutaniego–Rokhlina a pokryciami grafowymi. W §2.7 autor przechodzi natomiast do diagramów Brattelliego–Vershika i opisuje procedury przechodzenia pomiędzy tymi dwoma sposobami kodowania dynamiki. Nie jest to jedynie zmiana języka: przy odtwarzaniu struktury grafów z diagramu Brattelliego–Vershika pojawiają się dodatkowe subtelności, a w szczególności może być konieczne teleskopowanie w celu uzyskania dodatkowej kierunkowości odwzorowań wiążących. Warto też zaznaczyć, że diagramy Brattelliego–Vershika są formalnie wprowadzone dopiero w §2.7, mimo że autor odwołuje się do nich już wcześniej – tę kolejność dobrze by było zmienić.

Rozdział 3 dotyczy tematyki szczególnie aktualnej, związanej z mieszaniem wielokrotnym w układach parabolicznych i ogólnym otwartym problemem Rokhlina czy mieszanie pociąga za sobą mieszanie wszystkich rzędów. Wyniki wpisują się w żywy obecnie kierunek badań nad mechanizmami mieszania w układach o zerowej entropii. Autor pokazuje mieszanie wszystkich rzędów w następujących kontekstach:

- analityczne zamiany czasów potoków translacyjnych na torusie n -wymiarowym, dla których wcześniej mieszanie wykazał B. Fayad,
- zamiany czasów w nilpotokach Heisenberga badanych przez A. Avilę, G. Forniego i C. Ulcigrai.

Wkład autora rozprawy w teorię mieszania potoków można bardzo krótko podsumować w następujący sposób. A. Kanigowski i D. Ravotti wprowadzili abstrakcyjną własność LUS (ang. locally uniformly shearing flows) i wykazali, że dla potoków mieszających pociąga ona za sobą mieszanie wszystkich rzędów. Sformułowali również, w języku potoków specjalnych, warunki pozwalające zweryfikować LUS za pomocą kontrolowanego rozciągania sum Birkhoffa funkcji dachowej. Argument ten nawiązuje do klasycznych idei sięgających dowodu Marcusa dla potoków horocyklicznych. Z drugiej strony, w konstrukcjach B. Fayada, mieszanie gładkich reparametryzacji potoków liniowych na torusach wynika z precyzyjnych oszacowań pochodnych sum Birkhoffa, przy czym kierunek, w którym obserwuje się odpowiednie rozciąganie, może zależeć od skali czasu. Mechanizm typu shearing (w ustalonym kierunku centralnym) występuje w wynikach A. Avili, G. Forniego i C. Ulcigrai dotyczących zmian czasu nilpotoków Heisenberga.

Nowość w rozprawie Kucharskiego polega na połączeniu tych dwóch podejść. Autor modyfikuje formalizm Kanigowskiego–Ravottiego, dopuszczając w definicji dobrego potoku specjalnego dezintegrację zależną od rozważanego układu czasów, oraz uogólnia kryterium oparte na pochodnych sum Birkhoffa na bazy torusowe wyższego wymiaru. Następnie pokazuje, że oszacowania stojące za wcześniejszymi dowodami mieszania Fayada oraz Avili–Forniego–Ulcigrai spełniają tak zmodyfikowane warunki. Pozwala to przejść od znanego wcześniej mieszania do mieszania wszystkich rzędów. Głównym narzędziem jest przy tym reprezentacja potoku jako potoku specjalnego oparta na odwzorowaniu pierwszego powrotu; weryfikacja odpowiednich warunków opiera się w szczególności na oszacowaniach pierwszej pochodnej sum Birkhoffa, zapewniających duże rozciąganie, oraz drugiej pochodnej, kontrolującej dystorsję tego rozciągania.

Podsumowanie

Rozprawa jest technicznie ambitna i obejmuje szeroki zakres pojęć oraz metod z różnych części teorii układów dynamicznych. Największe wrażenie robi właśnie szerokość tematyczna pracy i umiejętność wykorzystania wspólnego motywu odwzorowań pierwszego powrotu w trzech dość odległych problemach. Jednocześnie miejscami tekst jest zbyt lakoniczny i zakłada od czytelnika dużą znajomość literatury. Doceniam jednak próbę ujednolicenia materiału pochodzącego z kilku prac i nadania rozprawie wspólnej narracji, zamiast prostego zestawienia niezależnych artykułów.

Wskazane wyżej uwagi krytyczne dotyczą zarówno sposobu prezentacji, jak i kilku miejsc wymagających dokładniejszego uzasadnienia lub doprecyzowania zakresu twierdzeń. Nie zmieniają one mojej ogólnej pozytywnej oceny rozprawy.

W mojej ocenie rozprawa Przemysława Kucharskiego stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, a przedstawione wyniki – w szczególności wcześniej opublikowany wynik dotyczący maksymalności atraktora dla rodziny Loziego, oparty na szczegółowej analizie odwzorowania pierwszego powrotu, konstrukcja pokryw grafowych dla układów wyższowymiarowych oraz nowe wyniki dotyczące mieszania wszystkich rzędów dla rozważanych zamian czasu potoków parabolicznych – świadczą o tym w sposób przekonujący. Kandydat wykazał się przy tym ogólną wiedzą teoretyczną w dyscyplinie matematyka, obejmującą dynamikę gładką, topologiczną i ergodyczną. O samodzielności naukowej kandydata świadczy w szczególności jednoautorski charakter kilku prac stanowiących podstawę rozprawy, w tym prac leżących u podstaw rozdziałów 1 i 3, a także opublikowanej pracy dotyczącej pokryw grafowych układów wyższowymiarowych. Część wyników rozdziału 2 pochodzi ponadto z pracy współautorskiej dotyczącej algorytmów przejścia między pokryciami grafowymi a diagramami Brattellego–Vershika.

W mojej ocenie praca spełnia wymagania prawne i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim w dyscyplinie matematyka i wnoszę o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

Joanna Kułaga-Przymus