

**Recenzja rozprawy habilitacyjnej
doktora Tomasza Andrzeja Beberoka**

***Wykładnik Markowa w przestrzeni L_p dla zbiorów z ostrzami oraz nierówności
typu Markowa na pewnych rozmaitościach algebraicznych***

Uwagi ogólne

Dr Tomasz Andrzej Beberok ukończył studia magisterskie w 2010 roku na Uniwersytecie Pedagogicznym im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie. Następnie w 2015 roku uzyskał stopień doktora nauk matematycznych na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego na podstawie rozprawy *Funkcja jądrowa Bergmana i problemy z nią związane* napisanej pod kierunkiem prof. Mirosława Barana. Po doktoracie odbył roczny staż naukowy (9 listopada 2015 – 30 września 2016) w Turcji w Sabanci University, Faculty of Engineering and Natural Sciences.

Dr Tomasz Andrzej Beberok zajmuje się szeroko rozumianą analizą matematyczną i jej zastosowaniami. Obejmują one teorię operatorów, teorię aproksymacji czy teorię funkcji rzeczywistych. Warto również dodać, że w pracach kandydata pojawiają się również pewne elementy geometrii algebraicznej o czym świadczy tytuł przedstawionej rozprawy. Dorobek naukowy kandydata stanowią 22 prace naukowe opublikowane w dobrych i bardzo dobrych czasopismach z analizy matematycznej. Są to czasopisma mające 100 i 70 pkt. ministerialnych. Należy tu jednak zwrócić uwagę, że czasopisma dotyczące analizy matematycznej i jej zastosowań są z reguły, zdaniem recenzenta, niedoszacowane na liście ministerialnej. Dr Tomasz Beberok wygłosił również kilkanaście wykładów na międzynarodowych konferencjach matematycznych. Obecnie realizuje samodzielny grant Miniatura. W przeszłości był wykonawcą w grantie OPUS kierowanym przez dr hab. Leokadię Białas-Cieź prof. UJ.

Jako rozprawę habilitacyjną: *Wykładnik Markowa w przestrzeni L_p dla zbiorów z ostrzami oraz nierówności typu Markowa na pewnych rozmaitościach algebraicznych* kandydat przedstawił 6 powiązanych tematycznie prac naukowych oznaczonych w jego autoreferacie A1-A6.

Uwagi szczegółowe

Cykl artykułów poświęcony jest nierównościom Markowa, których początki sięgają XIX wieku i badań nad zależnością między gęstością roztworu a stężeniem (Mendelejew, 1880). Z czasem doprowadziło to do pytania o relację między normą wielomianu a normą jego pochodnej. Odpowiedź na nie sformułował Markow, pokazując, że norma pochodnej wielomianu może być oszacowana przez kwadrat jego stopnia oraz normę samego wielomianu.

$$\|P'\|_{[-1,1]} \leq (\deg P)^2 \|P\|_{[-1,1]}.$$

Wynik ten jest optymalny.

Nierówność Markowa szybko znalazła liczne zastosowania i stała się przedmiotem dalszych badań. W przypadku wielu zmiennych rozwój teorii nastąpił później i początkowo dotyczył głównie zbiorów wypukłych. Ważnym krokiem było uogólnienie uzyskane w 1980 roku (Goetgheluck, 1980) dla

zbiorów postaci

$$D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^k, 0 \leq x \leq 1\}, \quad k > 1,$$

które posiadają osobliwość typu wielomianowego w punkcie $(0, 0)$. Pokazano tam, że dla wielomianów dwóch zmiennych zachodzą odpowiednie oszacowania ich pochodnych, przy czym wykładniki w tych nierównościach są optymalne. Obecność osobliwości w punkcie $(0, 0)$ powoduje, że wykładnik przy pochodnej względem drugiej zmiennej nie może być mniejszy niż $2k$.

Rozważmy teraz analogiczne zagadnienie w przestrzeniach L^p . Niech $1 \leq p < \infty$ oraz niech P będzie wielomianem stopnia co najwyżej n . Zamiast normy supremum rozpatrujemy teraz normę

$$\|P\|_{L^p([-1,1])} = \left(\int_{-1}^1 |P(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

dla $1 \leq p < \infty$.

Uzyskanie analogicznych nierówności typu Markowa w tym przypadku okazuje się znacznie trudniejsze i wymaga bardziej subtelnych narzędzi analitycznych. Mimo to zachodzą oszacowania postaci

$$\|P'\|_{L^p([-1,1])} \leq C(p) n^2 \|P\|_{L^p([-1,1])},$$

gdzie stała $C(p)$ zależy jedynie od p . Podobnie jak w przypadku normy supremum, rząd zależności od stopnia wielomianu jest optymalny.

W pracy [A1] kandydat podał przykład zbioru o osobliwości podobnej do D_k dla $k = 2$ oraz wykazał, że optymalny wykładnik w normie L^p jest taki sam jak w normie supremowej. Był to pierwszy tego typu przykład w literaturze. Zastosowane metody pozwalają również uzyskać optymalne nierówności dla $k \in \mathbb{N}$, co w przybliżeniu oznacza rozwiązanie problemu dla osobliwości wielomianowych.

Głównym wynikiem pracy [A3] jest następujące:

Twierdzenie 1. *Niech f będzie funkcją rzeczywistą, wypukłą na $[0, 1]$, taką że $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(1) < \infty$ oraz $f(t) > 0$ dla $t \in (0, 1]$. Niech*

$$\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq f(x^2)\}.$$

Wówczas dla $1 \leq p < \infty$ istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego wielomianu P stopnia co najwyżej n zachodzi

$$\max \left\{ \left\| \frac{\partial P}{\partial x} \right\|_{L^p(\Phi)}, \left\| \frac{\partial P}{\partial y} \right\|_{L^p(\Phi)} \right\} \leq C \frac{n^2}{f'(1/n^2)} \|P\|_{L^p(\Phi)}.$$

Ponadto, jeśli istnieje stała $I > 0$ taka, że $If(x) \geq xf'(x)$ dla $x \in [0, 1]$, to oszacowanie jest asymptotycznie optymalne.

Twierdzenie to obejmuje szeroką klasę zbiorów z osobliwościami. W szczególności dla $f(x) = x^{k/2}$, $k > 2$ dostaje się rezultat A. Kroć tj. otrzymujemy $\Phi = \tilde{D}_k$ gdzie

$$\tilde{D}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq |x|^k, |x| \leq 1\},$$

oraz optymalny wykładnik rzędu n^k .

W pracy [A4] autor bada czy zmiana dolnego ograniczenia w zbiorze D_k wpływa na wykładniki w nierównościach Markowa. W normie supremum pozostają one bez zmian, natomiast w normach L^p problem jest trudniejszy i wymaga odmiennych metod.

Twierdzenie 2. *Niech $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją wypukłą taką, że $f(0) = f'(0) = 0$ oraz $f'(1) < \infty$. Załóżmy, że istnieją stałe $a > 0$ i $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, takie, że $f(1) > a$ oraz $f^{1/k}$ jest funkcją wklęsłą na $(0, 1)$. Niech*

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, ax^k \leq y \leq f(x)\}.$$

Wówczas dla każdego $1 \leq p < \infty$ istnieje stała $C > 0$ taka, że dla dowolnego wielomianu P stopnia co najwyżej n zachodzą nierówności

$$\left\| \frac{\partial P}{\partial x} \right\|_{L^p(K)} \leq C n^2 \|P\|_{L^p(K)}, \quad \left\| \frac{\partial P}{\partial y} \right\|_{L^p(K)} \leq C \frac{n^2}{f'(1/n^2)} \|P\|_{L^p(K)}.$$

Ponadto powyższe oszacowania są asymptotycznie optymalne.

Wprowadźmy skrótowe oznaczenia. Piszemy $z_n \sim w_n$, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_n|}{|w_n|} \in (0, \infty).$$

Dla $a \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$, $u \in S^{d-1}$ definiujemy walec

$$L_a(r, u) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - a\|_2^2 < r^2 + \langle x - a, u \rangle^2\},$$

oraz przez $l_x(u)$ oznaczamy prostą przez x o kierunku u .

Definicja. Zbiór $K \subset \mathbb{R}^d$ jest typu *graph domain* względem $L_a(r, u)$, jeżeli dla każdego $x \in B(a, r)$ mamy

$$l_x(u) \cap K = [A_1(x), A_2(x)],$$

gdzie A_1, A_2 są ciągłe oraz

$$\inf_{x \in B(a, r)} \|A_1(x) - A_2(x)\|_2 > 0.$$

Zbiór K jest typu *piecewise graph domain*, jeżeli można go pokryć skończoną liczbą takich walców, dla których jest typu *graph domain*.

Definicja (jedno z najsilniejszych ostrzy). Niech $K \subset \mathbb{R}^d$ oraz $z \in K$. Mówimy, że z jest *jednym z najsilniejszych ostrzy* zbioru K , jeżeli istnieje walec $L_a(r, u)$, względem którego K jest zbiorem typu *graph domain*, oraz punkt $b \in B(a, r)$ taki, że $z = A_2(b)$ oraz dla wszystkich dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\max \left\{ \|z - A_2(g)\|_2 : g \in B(a, r), \|b - g\|_2 \leq \frac{\varepsilon_n}{n^2} \right\} = \frac{1}{2n^2}.$$

Głównymi rezultatami [A5] są następujące twierdzenia:

Twierdzenie 3. Niech $K \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem typu *piecewise graph domain*. Załóżmy, że jedno z najsilniejszych ostrzy zbioru K jest regularne. Niech (ε_n) będzie ciągiem rozwiązań równania

$$2n^2 \omega_K \left(\frac{\varepsilon_n}{n^2} \right) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas istnieje stała $\Psi > 0$ oraz ciąg wielomianów $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $P_n \in \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R}^2)$, taki że

$$\|\nabla P_n\|_{L^p(K)} \geq \Psi \frac{n^2}{\varepsilon_n} \|P_n\|_{L^p(K)}$$

gdzie $\omega_K(\cdot)$ jest tzw. modułem ciągłości brzegu zbioru K .

Twierdzenie 4. Niech (ε_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że

$$0 < \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$$

oraz istnieją stałe $I > 0$ i (C_n) takie, że (dla wszystkich n i m)

$$\frac{\varepsilon_n}{n^2} - \frac{\varepsilon_m}{m^2} \geq -C_m \frac{\varepsilon_m}{2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$\frac{\varepsilon_n}{n^2} - \frac{\varepsilon_m}{m^2} = -C_m \frac{\varepsilon_m}{2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow C_n \varepsilon_n = C_m \varepsilon_m,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-I}}{\varepsilon_n} \sup\{C_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

Wówczas istnieje zbiór zwarty $D \subset \mathbb{R}^2$, stała $M > 0$ oraz ciąg wielomianów $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (przy czym $P_n \in \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R}^2)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$) taki, że

$$\frac{\|\nabla P_n\|_{L^p(D)}}{\|P_n\|_{L^p(D)}} \sim \frac{n^2}{\varepsilon_n},$$

oraz dla dowolnego $Q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^2)$ zachodzi

$$\|\nabla Q\|_{L^p(D)} \leq M \frac{n^2}{\varepsilon_n} \|Q\|_{L^p(D)}$$

gdzie $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^d)$ oznacza klasę wszystkich wielomianów algebraicznych d zmiennych o współczynnikach rzeczywistych i stopniu co najwyżej n .

W pracach [A2] i [A6] dr Beberok rozważa nierówności Markowa na pewnych zbiorach algebraicznych. W pracy [A2] rozważany jest zbiór:

$$V = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_k^N = Q_0(y) + Q_1(y)x_k + \dots + Q_{N-1}(y)x_k^{N-1}\},$$

Głównym wynikiem pracy [A2] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5 *Jeśli E jest C_V^∞ -determinującym zwartym podzbiorem V , to równoważne są następujące warunki:*

(i) *(Nierówność Markowa względem $\mathcal{P}(y) \otimes \mathcal{P}_{N-1}(x^k)$) Istnieją dodatnie stałe M i r takie, że dla każdego wielomianu $P \in \mathcal{P}(y) \otimes \mathcal{P}_{N-1}(x^k)$ oraz każdego $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ zachodzi*

$$\|D^\alpha P\|_E \leq M(\deg P)^{r|\alpha|} \|P\|_E.$$

(ii) *Istnieją dodatnie stałe M i r takie, że dla każdego $P \in \mathcal{P}(y) \otimes \mathcal{P}_{N-1}(x^k)$ stopnia co najwyżej n , $n = 1, 2, \dots$, mamy*

$$|P(x)| \leq M \|P\|_E \quad \text{dla } x \in E_n := \{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, E) \leq 1/n^r\}.$$

(iii) *(Twierdzenie typu Bernsteina) Dla każdej funkcji $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli ciąg*

$$\{\text{dist}_E(f, \mathcal{P}_l(y) \otimes \mathcal{P}_{N-1}(x^k))\}_{l \in \mathbb{N}}$$

jest szybko malejący, to istnieje funkcja $\tilde{f} \in C_V^\infty(\mathbb{R}^d)$ taka, że

$$\tilde{f}|_E = f.$$

W pracy [A6] autor rozważa związki pomiędzy, zdefiniowanymi w tej pracy, nierównościami typu Kołmogorowa, lokalną nierównością $V_{m,w}$ -Markowa, nierównością $V_{m,w}$ -Markowa oraz własnością przedłużania. Pokazuje, że dla pewnych zbiorów pojęcia te są równoważne

Twierdzenie 4.9. *Dla każdego zwartego i $C_{m,w}^\infty$ -determinującego zbioru $E \subset V_{m,w}$ następujące warunki są równoważne:*

- (i) E spełnia nierówność typu Kołmogorowa
- (ii) E spełnia lokalną nierówność $V_{m,w}$ -Markowa
- (iii) E spełnia nierówność $V_{m,w}$ -Markowa
- (iv) E ma własność przedłużania ograniczonego.

Konkluzja

Przedstawiony przez dr Tomasza Andrzeja Beberoka cykl publikacji dotyczący wykładnika Markowa oraz nierówności typu Markowa zawiera ciekawe wyniki matematyczne. Należy zaznaczyć, że chociaż rozważane przez niego problemy i pytania mają stosunkowo proste sformułowanie to udzielenie sensownych odpowiedzi na nie wymaga zastosowania subtelnych metod analitycznych. Wyniki uzyskane przez kandydata mogą mieć potencjalne zastosowanie w numerycznym rozwiązywaniu problemów fizyki matematycznej, inżynierskich czy szeroko pojętych zastosowań matematyki.

Wniosek. Przedstawiona rozprawa spełnia wymogi formalne stawiane rozprawom habilitacyjnym określonymi w art. 219 ust. 1 pkt 2, ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce" (Dz. U. z 2023 r. poz. 742 ze zm.). Wnoszę zatem o nadanie dr Tomaszowi Andrzejowi Beberokowi stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka.

Piotr Krasoń