

Recenzja osiągnięcia naukowego przedstawionego w postępowaniu habilitacyjnym

w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka

Kandydat: dr Tomasz Andrzej Beberok

Tytuł osiągnięcia naukowego: *Wykładnik Markowa w przestrzeni L_p dla zbiorów z ostrzami oraz nierówności typu Markowa na pewnych rozmaitościach algebraicznych*

Przedłożone do oceny osiągnięcie habilitacyjne stanowi cykl sześciu jednotematycznych prac:

- [A1] T. Beberok, *Markov's inequality on some cuspidal domains in the L^p norm*, Dolomites Res. Notes Approx. 13 (2020), 12–19.
- [A2] T. Beberok, *Markov's inequality and C^∞ functions on certain algebraic hypersurfaces*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 43 (2020), 4303–4314.
- [A3] T. Beberok, *L_p Markov exponent of certain domains with cusps*, Dolomites Res. Notes Approx. 14 (2021), 7–15.
- [A4] T. Beberok, *L_p Markov exponent of certain UPC sets*, Z. Anal. Anwend. 41 (2022), 153–166.
- [A5] T. Beberok, *On L^p Markov type inequality for some cuspidal domains*, Math. Inequal. Appl. 26 (2023), 295–314.
- [A6] T. Beberok, *Kolmogorov and Markov type inequalities on certain algebraic varieties*, Anal. Math. 49 (2023), 681–697.

1. Charakterystyka ogólna osiągnięcia

Cykl dotyczy nierówności typu Markowa, a więc klasy zagadnień należących do klasycznego rdzenia teorii aproksymacji wielomianowej. Tematyka ta jest dobrze osadzona w matematyce analitycznej, łączy się z teorią aproksymacji, analizą funkcjonalną, własnościami przedłużania funkcji klasy C^∞ , a także z badaniem geometrii zbiorów osobliwych i algebraicznych.

W przedstawionym cyklu można wyróżnić dwa blisko powiązane nurty badawcze. Pierwszy z nich obejmuje prace poświęcone nierównościom Markowa w normach L^p dla domen z ostrzami, domen cuspidalnych oraz zbiorów UPC. Do tej grupy należą prace [A1], [A3], [A4] i [A5]. Drugi nurt tworzą prace [A2] i [A6], w których autor rozważa uogólnienia nierówności typu Markowa, lokalnej nierówności Markowa, nierówności typu Kołmogorowa oraz własności Bernsteina dla pewnych rozmaitości i zbiorów algebraicznych.

Już na tym etapie należy stwierdzić, że przedstawiony cykl jest tematycznie powiązany. Nie jest to zbiór przypadkowych publikacji, lecz konsekwentnie prowadzona linia badawcza skupiona wokół nierówności typu Markowa oraz ich zastosowań i uogólnień. Warto zarazem zaznaczyć, że spójność ta ma charakter *dwuczłonowy*: z jednej strony autor bada ostre wykładniki i nierówności w normach całkowych dla domen z osobliwościami, z drugiej zaś strukturę nierówności Markowa i pokrewnych własności na wybranych zbiorach algebraicznych.

2. Omówienie wyników składających się na osiągnięcie

2.1. Prace dotyczące wykładnika Markowa w normie L^p dla zbiorów z ostrzami

W pracy [A1] autor rozpatruje szczególną domenę cuspidalną, tzw. domenę Koornwinder, a

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y + 1, x^2 \geq 4y\},$$

i wykazuje, że jej wykładnik Markowa w normie L^p jest równy 4. Wynik ten ma znaczenie, ponieważ stanowi przykład zbioru z ostrzem, dla którego udało się dokładnie wyznaczyć wykładnik w normie L^p . Tego rodzaju rezultaty są technicznie trudniejsze niż analogiczne twierdzenia w normie supremum i wymagają zastosowania metod bardziej subtelnych niż klasyczne argumenty geometryczne.

Praca [A3] rozwija tę tematykę i dotyczy rodzin domen z ostrzami, dla których autor wyznacza ostre nierówności typu Markowa w normie L^p . Otrzymane rezultaty pokazują, że dla analizowanych rodzin domen wykładniki w normie L^p pokrywają się z odpowiednimi wykładnikami znanymi wcześniej w normie supremum. Jest to ważna obserwacja, gdyż przez dłuższy czas nie było jasne, czy w normach całkowych należy oczekiwać tych samych rzędów wzrostu co w normie jednostajnej.

W pracy [A4] autor rozszerza swoje badania na szeroką klasę zbiorów UPC (uniformly polynomially cuspidal). Jest to niewątpliwie jeden z mocniejszych punktów cyklu. Autor uzyskuje ostre nierówności typu Markowa dla szerokiej rodziny domen, które nie mieszczą się już w najprostszych modelach domen cuspidalnych. W ten sposób przechodzi od przykładów jednostkowych do bardziej systematycznego opisu zjawiska.

Praca [A5] dotyczy odwrotnej nierówności typu Markowa w normie L^p dla pewnych domen cuspidalnych. Autor analizuje tu zagadnienie z perspektywy asymptotycznej ostrości znanych oszacowań, w szczególności wyników typu Kroó. Oznacza to odejście od samego stwierdzenia istnienia nierówności na rzecz dokładniejszego badania, czy uzyskane wcześniej górne oszacowania rzeczywiście mają poprawny rząd. Tego rodzaju prace wzmacniają wcześniejsze twierdzenia i porządkują obraz zjawiska.

Podsumowując ten fragment cyklu, należy stwierdzić, że autor rozwija wyraźną i konsekwentną linię badań nad wykładnikiem Markowa w normach L^p dla domen z osobliwościami. Wyniki te są niewątpliwie oryginalne, poprawnie umiejscowione w literaturze

i merytorycznie wartościowe.

2.2. Prace dotyczące zbiorów algebraicznych i własności typu Markowa

W pracy [A2] autor przechodzi do zagadnień związanych z nierównością Markowa i własnością Bernsteina dla pewnych hiperpowierzchni algebraicznych. Punktem wyjścia jest klasyczny fakt, że dla zbiorów wyznaczających klasy C^∞ nierówność Markowa jest równoważna własności Bernsteina. Autor uzyskuje odpowiednik tego rezultatu dla pewnych zwartych podzbiorów rozmaitości algebraicznych. Jest to wynik o charakterze bardziej strukturalnym niż w pracach [A1], [A3], [A4]. Nie chodzi tu o obliczenie wykładnika dla jednej konkretnej domeny, lecz o przeniesienie klasycznego schematu pojęciowego na nowe środowisko geometryczne.

Jeszcze wyraźniej widać to w pracy [A6], w której autor bada związki pomiędzy nierównością typu Markowa, lokalną nierównością Markowa oraz nierównością typu Kołmogorowa na pewnych rozmaitościach algebraicznych. Praca ta ma charakter konceptualny: autor nie tylko formułuje odpowiednie uogólnienia, ale także pokazuje ich równoważność. W rezultacie otrzymuje analog klasycznego schematu Bos–Milman–Pleśniak dla pewnej klasy zbiorów algebraicznych. Uważam ten artykuł za najbardziej dojrzały i najsilniejszy teoretycznie element całego osiągnięcia.

Wyniki [A2] i [A6] dobrze uzupełniają prace o domenach cuspidalnych. Pokazują, że autor nie ogranicza się do rozwiązywania pojedynczych problemów obliczeniowych, lecz potrafi także formułować i udowadniać twierdzenia o charakterze strukturalnym, osadzone w szerszym kontekście teorii aproksymacji i teorii przedłużania funkcji gładkich.

3. Ocena spójności tematycznej cyklu

Jednym z warunków ustawowych jest przedstawienie cyklu prac powiązanych tematycznie. W mojej ocenie warunek ten jest spełniony. Przemawiają za tym następujące argumenty.

Po pierwsze, wszystkie prace dotyczą nierówności typu Markowa lub pojęć bezpośrednio z nimi związanych: wykładnika Markowa, nierówności lokalnych, nierówności typu Kołmogorowa, własności Bernsteina, a także problemów przedłużania funkcji klasy C^∞ .

Po drugie, wszystkie artykuły mieszczą się w obszarze teorii aproksymacji wielomianowej na zbiorach nietrywialnych geometrycznie: domenach z ostrzami, zbiorach UPC oraz rozmaitościach algebraicznych.

Po trzecie, między pracami zachodzi rzeczywista ciągłość merytoryczna. Prace [A1], [A3], [A4] i [A5] rozwijają jeden zwarty ciąg pytań o optymalne wykładniki w normie L^p dla zbiorów z osobliwościami. Z kolei [A2] i [A6] przenoszą środek ciężkości na własności strukturalne nierówności typu Markowa na zbiorach algebraicznych, zachowując jednak ten sam główny rdzeń problemowy.

4. Ocena oryginalności i wartości naukowej wyników

Przedstawione w cyklu wyniki są niewątpliwie oryginalne. Autor uzyskuje zarówno rezultaty dokładne, dotyczące wartości wykładnika Markowa dla wybranych klas zbiorów, jak i wyniki o charakterze strukturalnym, opisujące równoważność różnych wersji nierówności typu Markowa i pokrewnych własności na pewnych rozmaitościach algebraicznych.

Do najistotniejszych osiągnięć zaliczyłbym:

- podanie przykładów oraz klas domen cuspidalnych, dla których wyznaczono ostre wykładniki Markowa w normie L^p ,
- rozszerzenie tych badań na szerszą klasę zbiorów UPC,
- zbadanie asymptotycznej ostrości nierówności typu Markowa dla pewnych domen cuspidalnych,
- przeniesienie klasycznych zależności między nierównością Markowa, własnością Bernsteina, lokalną nierównością Markowa i nierównością Kołmogorowa na pewne klasy zbiorów algebraicznych.

Są to rezultaty wartościowe i dobrze wpisane w specjalistyczną literaturę przedmiotu. Widać znajomość wcześniejszych prac, trafny dobór problemów oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia badań.

5. Czy osiągnięcie stanowi znaczny wkład w rozwój dyscypliny?

Odpowiedź na to pytanie przesądza o konkluzji mojej recenzji.

Nie mam wątpliwości, że przedstawiony cykl zawiera wyniki nowe i merytorycznie poprawne. Nie mam także wątpliwości, że autor wniósł specjalistyczny wkład do badań nad nierównościami typu Markowa. Uważam jednak, że co innego oznacza *oryginalny i wartościowy wkład do wąskiej specjalności*, a co innego *znaczny wkład w rozwój dyscypliny* w rozumieniu ustawowym.

W mojej ocenie przedstawione osiągnięcie spełnia raczej to pierwsze kryterium niż drugie. Przemawiają za tym następujące okoliczności.

5.1. Skala oddziaływania wyników

Wyniki cyklu dotyczą obszaru wyraźnie niszowego, nawet w obrębie samej teorii aproksymacji. Jest to tematyka specjalistyczna, rozwijana przez stosunkowo wąskie grono badaczy. Taki profil badań sam w sobie nie jest zarzutem, ale utrudnia wykazanie, że osiągnięcie wywarło już znaczący wpływ na rozwój całej dyscypliny matematyka.

Analiza recepcji tych prac prowadzi raczej do wniosku, że ich oddziaływanie ma charakter ograniczony, środowiskowy i wyspecjalizowany. Prace te są zauważane w najbliższym

otoczeniu tematycznym, jednak nie widać, aby stały się szeroko cytowanym punktem odniesienia, zainicjowały nowy silny program badawczy lub zasadniczo zmieniły sposób prowadzenia badań w większej części teorii aproksymacji.

5.2. Charakter uzyskanych rezultatów

Znaczna część cyklu polega na rozszerzaniu, doprecyzowywaniu i uzupełnianiu istniejącej linii badawczej. Jest to praca cenna i potrzebna, lecz trudno ją zakwalifikować jako osiągnięcie o znaczącym wpływie na rozwój dyscypliny.

W szczególności prace [A1], [A3], [A4] i [A5] dotyczą kolejnych klas domen, dla których wyznaczane są lub doprecyzowywane wykładniki typu Markowa w normie L^p . Jest to ciąg logiczny i dobrze poprowadzony, ale jego naturalny zakres pozostaje dość wąski. Prace [A2] i [A6] mają większy ciężar teoretyczny, jednak również one odnoszą się do precyzyjnie określonych klas zbiorów algebraicznych, a nie do szerokich ram teorii.

5.3. Widoczność międzynarodowa i cytowalność

Dostępne wskaźniki bibliometryczne i cytowania potwierdzają, że dorobek autora jest dostrzegany, lecz nie wskazują na silne, szerokie oddziaływanie. Cytowania istnieją, jednak ich liczba oraz rozproszenie nie pozwalają, moim zdaniem, mówić o wyraźnym, ponadlokalnym wpływie na rozwój dyscypliny.

Mam świadomość, że w ocenie habilitacyjnej dane bibliometryczne nie mogą być kryterium rozstrzygającym. Mogą jednak pełnić rolę pomocniczą przy ocenie, czy osiągnięcie przeszło już od poziomu *wartościowego wkładu specjalistycznego* do poziomu *znaczącego wpływu na rozwój dyscypliny*. W tym przypadku nie widzę dostatecznie mocnych przesłanek, aby taką tezę postawić.

5.4. Relacja do stanu badań

Warto również zauważyć, że część wyników autora wpisuje się w ciąg badań rozwijanych równolegle przez innych specjalistów, a niekiedy została następnie uogólniona lub domknięta przez późniejsze prace. Nie osłabia to oryginalności poszczególnych artykułów, ale utrudnia uznanie całego cyklu za punkt zwrotny w rozwoju teorii.

Innymi słowy, widzę tu raczej solidne i samodzielne rozwijanie określonej niszy badawczej niż osiągnięcie, które zmieniło stan dyscypliny w stopniu uzasadniającym kwalifikację *znacznego wkładu*.

6. Pozostała aktywność naukowa

Z autoreferatu wynika, że autor wykazuje aktywność konferencyjną, odbywał staże i wizyty badawcze oraz prowadzi współpracę z więcej niż jednym ośrodkiem. Należy to ocenić pozytywnie. Widać również ciągłość aktywności publikacyjnej oraz konsekwencję w wyborze tematyki badawczej.

Nie zmienia to jednak mojej zasadniczej oceny samego osiągnięcia habilitacyjnego. Dodatkowa aktywność naukowa może wzmacniać ogólny obraz samodzielności badawczej, ale nie zastępuje wymogu, by przedstawione osiągnięcie stanowiło znaczny wkład w rozwój dyscypliny.

7. Konkluzja

Podsumowując, stwierdzam, że przedstawiony przez dr. Tomasza Andrzeja Beberoka cykl publikacji:

- jest **spójny tematycznie**,
- zawiera **wyniki oryginalne i merytorycznie wartościowe**,
- świadczy o **samodzielności badawczej autora** oraz dobrej orientacji w specjalistycznej literaturze,
- stanowi **wkład** do badań nad nierównościami typu Markowa w teorii aproksymacji.

Jednocześnie, po analizie przedłożonych prac, autoreferatu oraz dostępnych informacji o odbiorze wyników, **nie znajduję wystarczających podstaw do uznania, że osiągnięcie to stanowi znaczny wkład w rozwój dyscypliny matematyka** w rozumieniu art. 219 ust. 1 pkt 2 ustawy.

Moja ocena końcowa przedstawionego osiągnięcia habilitacyjnego jest zatem **krytyczna**. Według mnie przedstawione osiągnięcie naukowe nie spełnia w sposób przekonujący ustawowego warunku stanowiącego podstawę do nadania stopnia doktora habilitowanego. W związku z czym opiniuję **negatywnie** wniosek o nadanie dr. Tomaszowi Andrzejowi Beberokowi stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka.