

Prof. dr hab. Jerzy Kąkol

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Poznań, 15 październik 2025

**RECENZJA ROSPRAWY DOKTORSKIEJ MGR NATALII
MAŚLANY**

**COMBINATORIAL BANACH SPACES AND RELATED
TOPICS: ALGEBRAIC STRUCTURE AND
SELF-ISOMETRIES**

Rozprawa doktorska głównie dotyczy geometrycznych i algebraicznych struktur przestrzeni Banacha jak również $*$ -algebr Banacha z wykorzystaniem szeregu technik zarówno Analizy Funkcjonalnej liniowej i nieliniowej, geometrii przestrzeni Banacha oraz abstrakcyjnej analizy harmonicznej.

Całość rozprawy opiera się na trzech artykułach naukowych opublikowanych w znaczących czasopismach o zasięgu międzynarodowym:

1. Natalia Maślany, **Isometries of combinatorial Tsirelson spaces**, Proceedings of the American Mathematical Society, 151 (2023), 4475-4484.
2. Natalia Maślany, **On isometries and Tingleys problem for the spaces $T[\theta, S_\alpha]$** , $1 \leq \alpha \leq \omega_1$, Studia Mathematica, 273 (2023), 285-299.
3. Tomasz Kania and Natalia Maślany, **Differential embeddings into algebras of topological stable rank 1**, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, published online 2024, 1-25. doi:10.1017/prm.2024.108

Dwie pierwsze publikacje (wspomniane powyżej) mocno spinają się tematycznie. Pierwsza z nich jest głównie związana z analizą autoizometrii w przestrzeniach Banacha typu Tsirelsona, ze szczególnym uwzględnieniem kombinatorycznych przestrzeni Tsirelsona typu $T[\theta, S_\alpha]$, gdzie $0 < \theta < 1$ oraz S_α oznacza rodzinę Schreiera rzędu α gdy $1 \leq \alpha \leq \omega_1$.

W tym zakresie uzyskane wyniki badań prowadzonych przez Panią mgr Natalię Maślany podają całkowity opis liniowych suriektywnych izometrii w klasie kombinatorycznych przestrzeni Tsirelsona powyższego typu.

Te rezultaty badań Pani mgr Natalii Maślany znalazły swoje interesujące zastosowania do pełnego rozwiązania problemu Tingleya dla tego typu przestrzeni i zostały umieszczone w publikacji no. 2.

Tutaj właśnie widzę istotny wkład naukowy Pani mgr Natalii Maślany w badaniach wokół (nadal otwartego) problemu Tingleya w nieklasyfikowanych przestrzeniach Banacha.

Chodzi mianowicie o następujące naturalne pytanie postawione przez Tingleya (1978):

Problem 1. Niech X oraz Y będą przestrzeniami unormowanymi o sferach jednostkowych odpowiednio S_X oraz S_Y . Załóżmy że $U : S_X \rightarrow S_Y$ jest surjektywną izometrią pomiędzy sferami. Czy istnieje wówczas izometria liniowa $\bar{U} : X \rightarrow Y$ taka, że zachodzi równość $\bar{U}|_{S_X} = U$?

Warto w tym miejscu wspomnieć, że problem Tingleya ma pozytywną odpowiedź dla wielu klasycznych przestrzeni Banacha, w tym $\ell_p(\Gamma)$, $L_p(\mu)$ dla $1 \leq p \leq \infty$ oraz $C(\Omega)$. Szereg uzupełniających informacji na ten temat można również znaleźć w paragrafie 3.3 autoreferatu doktorantki.

Ostatnia (podana powyżej) publikacja, która częściowo wpisuje się w całość tematyczną omawianej rozprawy doktorskiej, bada między innymi otwartość mnożenia w przemiennych, gładkich *-algebrach Banacha oraz jej związek z wymiarem pokryciowym podstawowej przestrzeni zwartej.

Podano w niej ogólne warunki, przy których mnożenie jest otwarte, a także przedstawiono pełną charakteryzację (jednostajnej) otwartości w algebrach funkcji ciągłych o wartościach zespolonych w kategoriach wymiaru pokrycia.

Pokrótkie omówię wspomniane publikacje wchodzące w skład rozprawy doktorskiej. Pozwolę sobie jednak nie przytaczać (przypominać) szeregu definicji i komentarzy dotyczących omawianych wyników i pojęć,

jak również nie analizować stanu wiedzy na temat omawianych zagadnień. Wyczerpujący opis w tej kwestii znajduje się w rozdziale trzecim dostarczonych materiałów (zob. Literature review).

W pierwszym cytowanym powyżej artykule **Isometries of combinatorial Tsirelson spaces** (PAMS) Pani mgr Natalia Maślany, wykorzystując pewne idee zawarte w publikacji autorów L. Antunesa i K. Beanlanda [4] (wg. zamieszczonego spisu literatury), udowodniła dwa twierdzenia charakteryzujące (liniowe) izometrie w kombinatorycznych przestrzeniach Tsirelsona $T[\theta, S_\alpha]$ dla $1 \leq \alpha \leq \omega_1$. Główny wynik pracy zawarty jest w Theorem B, które dla $\theta \in (0, 2^{-1}]$ oraz $\alpha \geq 2$ przeliczalnego, charakteryzuje operator

$$U : T[\theta, S_\alpha] \rightarrow T[\theta, S_\alpha]$$

by był liniową surjektywną izometrią. Wynik ten rozwiązuje problem postawiony przez L. Antunesa i K. Beanlanda w [4].

Kolejna praca **On isometries and Tingleys problem for the spaces $T[\theta, S_\alpha]$** , $1 \leq \alpha \leq \omega_1$, (Studia Math.) jest kontynuacją tematyki poprzedniej publikacji i przedstawia zastosowania uzyskanych w niej wyników do rozwiązania problemu Tingleya dla kombinatorycznych przestrzeni Tsirelsona powyższego typu.

Dowód głównego Twierdzenia 2 opiera się na szeregu poszczególnych lematów, których dowody korzystają z pewnych technik i idei zawartych już w publikacji D. N. Tana, *Isometries of the unit spheres of the Tsirelson space T and the modified Tsirelson space TM* , Houston J. Math. 38 (2012), 571-581. Chciałbym tu podkreślić, że zastosowanie tych idei wymagało od doktorantki bardzo dobrej znajomości tematu i biegłości technicznej.

Kolejna publikacja **Differential embeddings into algebras of topological stable rank 1**, (Proc. Royal Soc. Edinburgh), wspólnie napisana z promotorem prof. Tomaszem Kanią, bada otwartość mnożenia w przemiennych, gładkich *-algebrach Banacha.

Tematyka prezentowana w tej publikacji była rozwijana dla różnych algebr funkcyjnych takich jak przestrzenie funkcji ciągłych $C(X)$ na zerowymiarowych zwartych przestrzeniach X (w przypadku rzeczywistym), przestrzenie funkcji ograniczonych, jak również przestrzenie funkcji o ograniczonej wariacji. Przegląd historyczny tych szeregu badań jest dobrze przedstawiony przez autorów powyższej publikacji.

Główny wynik omawianej publikacji widzę w interesującym Twierdzeniu 1.5 (z cytowanego powyżej artykułu) podającym zespolony odpowiednik wyniku Komisarskiego, łączącego otwartość mnożenia w algebrze rzeczywistej $C(X)$ funkcji ciągłych na przestrzeni zwartej X z wymiarem pokryciowym przestrzeni X . Dowód tego Twierdzenia 1.5 jest

oparty na szeregu dodatkowych lematach, które same w sobie wydają się ciekawe. Przypomnę treść tego wyniku:

Theorem 2. *Let X be a compact space. Then the following conditions are equivalent for the algebra $C(X)$ of continuous complex-valued functions on X :*

- (i) $C(X)$ has open multiplication;
- (ii) $C(X)$ has uniformly open multiplication;
- (iii) the covering dimension of X is at most one.

Należy dodać, że Draga i Kania zainicjowali systematyczne badanie mnożenia otwartego w ogólnych algebrach Banacha, zob. **When is multiplication in a Banach algebra open?**, Linear Alg. Appl., vol. 538, pp. 149-165, 2018, i wykazali, że algebra Banacha z unitarnym otwartym mnożeniem musi mieć topologicznie stabilny rząd pierwszy. W przypadku przestrzeni zwartej X o wymiarze co najmniej dwa powyższe twierdzenie jest nieprawdziwe, tak więc przestrzeń Banacha $C(X)$ dla takiej zwartej X nie musi mieć mnożenia otwartego.

Podsumowując, chciałbym stwierdzić, że publikacje wchodzące w skład omawianej rozprawy doktorskiej są napisane i zredagowane w sposób jasny i przejrzysty. Dla wygody czytelnika mgr Natalia Maślany przytacza niezbędne definicje, pojęcia i własności owych pojęć, jak również podaje aspekty historyczne rozwijanych teorii.

Uzyskane twierdzenia w ramach rozprawy doktorskiej, a opublikowane w znaczących czasopismach o zasięgu międzynarodowym, świadczą o tym, że doktorantce Pani mgr Natalii Maślanej udało się uzyskać ważne rezultaty naukowe stanowiące oryginalny i istotny wkład w rozwój tej niełatwej a interesującej tematyki.

W związku z powyższym uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska *Combinatorial Banach spaces and related topics: algebraic structure and self-isometries* spełnia wszystkie wymagania ustawowe i wnioskuję o dopuszczenie mgr Natalii Maślany do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka. Ponadto uważam, że rozprawa doktorska Pani mgr Natalii Maślany zasługuje na wyróżnienie.

Jerzy Kąkol

