

prof. Grzegorz Plebanek
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski
grzegorz.plebanek@math.uni.wroc.pl

Wrocław, 27 listopada 2025

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Natalii Maślany

Pani mgr Natalia Maślany przedstawiła rozprawę

*Combinatorial Banach spaces and related topics:
algebraic structures and self-isometries.*

Promotorem doktoratu jest dr hab. Tomasz Kania. Praca jest napisana po angielsku, liczy ponad 90 stron tekstu i prezentuje rezultaty zawarte w

- (i) dwóch samodzielnych artykułach doktorantki (Proc. AMS i Studia Math.);
- (ii) pracy wspólnej z promotorem (Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A).

1. OMÓWIENIE GŁÓWNYCH WYNIKÓW ROZPRAWY

Jednym z głównych przedmiotów badań rozprawy są przestrzenie Tsirelsona. Przypomnijmy, że Tsirelson dokonał przełomu w myśleniu o ośrodkowych przestrzeniach Banacha: skonstruował taką (nieskończenie wymiarową) refleksywną przestrzeń X , która nie zawiera izomorficznych kopii ani ℓ_p , ani c_0 . Teraz termin przestrzeń Tsirelsona w istocie odnosi się do przestrzeni sprzężonej X^* — konstrukcja jej normy bezpośrednio wiąże się z kombinatoryką rodzin skończonych podzbiorów \mathbb{N} .

Podstawowym przykładem takiej rodziny jest rodzina Schreiera \mathcal{S}_1 , złożona z tych zbiorów $A \subseteq \mathbb{N}$, które spełniają zależność $|A| \leq \min A$. Rodziny Schreiera wyższego rzędu \mathcal{S}_α definiuje się indukcyjnie dla wszystkich liczb porządkowych $\alpha < \omega_1$. Rodzina \mathcal{S}_1 pojawiła się w związku badaniem własności Banacha-Saksa, a w drugiej połowie XX wieku stała się punktem wyjścia do konstrukcji wielu ważnych, kombinatorycznie zdefiniowanych, przykładów ośrodkowych przestrzeni Banacha.

Wyróżnia się teraz całą rodzinę przestrzeni Tsirelsona $T(\theta, \mathcal{S}_\alpha)$ — tutaj $\theta \in [0, 1/2]$ jest parametrem użytym w konstrukcji normy, a \mathcal{S}_α jest uogólnioną rodziną Schreiera rzędu α . W swojej pracy doktorantka scharakteryzowała wszystkie izometrie przestrzeni postaci $T(\theta, \mathcal{S}_\alpha)$: dla $\alpha = 1$ są one wyznaczone przez permutację pewnego zbioru skończonego i zmianę znaków, tymczasem dla $\alpha > 1$ takie izometrie pozwalają jedynie na zmianę znaku na ciągu bazowym przestrzeni.

Artykuł ze *Studia Mathematica* dotyczy następującego problemu Tingleya:

Czy każda surjektywna izometria pomiędzy sferami jednostkowymi przestrzeni unormowanych (nad ciałem \mathbb{R}) przedłuża się do izometrii całych przestrzeni?

Wiele klasycznych przestrzeni taką tezę spełnia, ale problem wydaje się być wysoce nietrywialny nawet w przestrzeniach skończone wymiarowych.

Rozwijając pomysły z poprzedniej pracy, w rozprawie udowodniono, że zagadnienie Tingleya ma pozytywne rozwiązanie w przestrzeniach $T(\theta, \mathcal{S}_\alpha)$; we wspomnianej publikacji przy dodatkowym założeniu, że $1/\theta \geq 2$ jest liczbą naturalną, natomiast Appendix rozprawy traktuje ogólny przypadek $\theta \leq 1/2$.

Praca wspólna dotyczy subtelnych zagadnień związanych ze strukturą algebr Banacha. Jednym z nich jest pytanie o otwartość mnożenia jako funkcji dwóch zmiennych. Autorzy dowodzą, że w zespolonej algebrze postaci $C(X)$ mnożenie jest otwarte wtedy i tylko wtedy gdy wymiar pokryciowy zwartej przestrzeni X nie przekracza 1. Dowód jest złożony nawet w przypadku, gdy $X = [0, 1]$. Następne kroki wykorzystują możliwość przedstawienia dowolnej przestrzeni zwartej jako granicy systemu odwrotnego, z zachowaniem wymiaru. Jak sądzę, końcowy argument podany na stronie 23 wymaga dodatkowego komentarza, jako że twierdzenie Mardešica o dobrze uporządkowanych systemach odwrotnych działa w przypadku przestrzeni ciężaru $\leq \omega_1$.

2. OCENA

Praca o izometriach przestrzeni Tsirelsona zawiera, w szczególności, odpowiedź na pytanie postawione przez Antunesa i Beanlanda (w artykule z 2022 roku) i niewątpliwie wyniki autorki są nietrywialne i jakościowo nowe. Artykuł o problemie Tingleya jest także interesujący, a ten kierunek badań doczekał się już kontynuacji.¹ Wspólna publikacja doktorantki i promotora porusza wiele subtelnych zagadnień z zakresu algebr Banacha i dokumentuje znaczącą swobodę autorki w stosowaniu różnorodnych technik dowodowych.

Zagadnienia podejmowane przez panią Natalię Maślany wymagają bardzo dobrej znajomości licznych, złożonych problemów z teorii przestrzeni i algebr Banacha, a zaprezentowane w rozprawie wyniki bezpośrednio wpisują się w aktualne kierunki badań, stanowiące obszar zainteresowań wielu wybitnych specjalistów. W konsekwencji lektura doktoratu jest bardzo satysfakcjonująca, a samą rozprawę oceniam wysoko.

3. KONKLUZJA

Rozprawa doktorska mgr Natalii Maślany prezentuje oryginalne rozwiązania problemów naukowych — ich dowody wymagały złożonych argumentów i wielu nowatorskich pomysłów. Tym samym recenzowana rozprawa spełnia wymagania ustawowe i oczekiwania środowiska naukowego, określone dla tego etapu kariery naukowej.

Mając na względzie wysoki poziom naukowy rozprawy, nie mam wątpliwości, że rozprawa zasługuje na wyróżnienie.



¹patrz M. Fakhoury, *Tingley's problem for Schreier spaces and their p -convexifications*, J. Funct. Anal. 289 (2025), no. 10, Paper No. 111122.