

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym Pani dr Kamili Kliś-Garlickiej

Pani dr Kamila Kliś-Garlicka przedstawiła osiągnięcie naukowe stanowiące cykl powiązanych artykułów naukowych o tytule "Zawężenie operatorów mnożenia na przestrzeni L^2 z miarą Lebesgue'a na okręgu jednostkowym i operatory sprzężenia". Na osiągnięcie naukowe składa się osiem prac, wszystkie współautorskie. Współautorami pięciu z tych prac są w kolejności alfabetycznej: M.C. Camara, B. Łanucha oraz M. Ptak, jednej M.C. Camara, J. Jurasik, M. Ptak. Współautorami ostatnich dwóch prac są M.C. Camara oraz M. Ptak. Wszystkie artykuły ukazały się w dobrych czasopismach o ugruntowanej pozycji, z zasady publikujących ważne wyniki w teorii operatorów. Takie jest też moje pierwsze wrażenie dotyczące recenzowanych prac. Zawierają one ważne i dobre wyniki. Ich uzyskanie wymagało doskonałego opanowanie technik dowodowych tego działu teorii operatorów. Dowody są technicznie skomplikowane, co moim zdaniem nie jest wadą. Wręcz przeciwnie cenię matematykę o niełatwych, technicznych dowodach.

Sporo z twierdzeń udowodnionych w pracach stanowiących osiągnięcie naukowe dotyczy przestrzeni modelowych K_θ^2 , które na mocy definicji są dopełnieniami ortogonalnymi w przestrzeni Hardy'ego H^2 przestrzeni θH^2 , gdzie θ jest funkcją wewnętrzną. To ważna i bardzo aktualna tematyka badań. Jestem przekonany, że niektóre z uzyskanych wyników, na przykład te dotyczące operatorów Toeplitza, będą za jakiś czas uważane za klasyczne w tej dziedzinie. Omówię teraz bardziej szczegółowo zawartość recenzowanych artykułów. Zawierają one wiele twierdzeń. Nie jest więc dobrym pomysłem omawianie wszystkich. Wybrałem więc kilka z nich, które podobały mi się najbardziej (kolejność odpowiada kolejności plików we wniosku w wersji elektronicznej, którą otrzymałem).

Niech α i θ będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi. Niech także $P_\alpha: L^2 \rightarrow K_\alpha^2$ będzie projekcją ortogonalną. Dla $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ definiujemy domknięty i gęsto określony operator

$$A_\varphi^{\theta, \alpha}: K_\theta^2 \supset \mathcal{D} \rightarrow K_\alpha^2$$

o naturalnie określonej dziedzinie \mathcal{D} , przyjmując

$$A_\varphi^{\theta, \alpha} f = P_\alpha(\varphi f).$$

Operator $A_\varphi^{\theta, \alpha}$ nazywa się asymetrycznym obciętym operatorem Toeplitza. Przestrzeń wszystkich ograniczonych asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza oznaczana jest przez $\mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2) = \mathcal{T}(\theta, \alpha)$. Ciekawe, moim zdaniem, jest następujące twierdzenie z pracy [O1] (pozostawiam oryginalne sformułowanie w języku angielskim):

Theorem 1 (Theorem 5.1, O1). *Let α, θ be nonconstant inner functions such that $\alpha \leq \theta$, and let $A: K_\theta^2 \rightarrow K_\alpha^2$ be a bounded operator. Then $A \in \mathcal{T}(\theta, \alpha)$ if and only if there are $\psi \in K_\alpha^2$, $\chi \in K_\theta^2$ such that*

$$A - S_\alpha A S_\theta^* = \psi \otimes k_0^\theta + k_0^\alpha \otimes \chi.$$

Symbol k_0 oznacza po prostu funkcję $1 - \overline{\theta(0)}\theta(z)$, a operator S_θ zdefiniowany jest jako $P_\theta S|_{K_\theta^2}$, gdzie S jest operatorem przesunięcia na przestrzeni Hardy'ego. Przypomnijmy, że operator A jest operatorem Toeplitza na przestrzeni Hardy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A = S^* A S,$$

gdzie S jest operatorem przesunięcia. Twierdzenie 6.1 w pracy [O1] charakteryzuje operatory Toeplitza w $\mathcal{T}(\theta, \alpha)$ jako te, dla których

$$A - S_\alpha^* A S_\theta = \mu \otimes \tilde{k}_0^\theta + \tilde{k}_0^\alpha \otimes \nu$$

dla pewnych $\mu \in K_\alpha^2$ and $\nu \in K_\theta^2$, gdzie $\tilde{k}_0^\theta = \bar{z}(\theta(z) - \theta(0))$.

Praca [O2] poświęcona jest badaniu dualnych obciętych operatorów Toeplitza. Wydaje mi się, że najważniejszym osiągnięciem w tym artykule jest właśnie charakteryzacja dualnych obciętych operatorów Toeplitza. W pracy opisana jest też ciekawa, inspirowana przypadkiem klasycznym, metoda odzyskiwania symbolu obciętego operatora Toeplitza. Moją uwagę zwróciły też wyniki dotyczące operatorów Hankela. Przytoczę następujące twierdzenie.

Theorem 2 (Theorem 25, O2). (c) *Let $\hat{\Gamma} \in \mathcal{B}(\theta H^2, H_-^2)$. Then $\hat{\Gamma} \in \mathcal{T}(\theta H^2, H_-^2)$ if and only if $\check{T}_z \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} \hat{T}_z^\theta$ and in this case $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_\varphi^\theta$ with $P^-(\theta\varphi) = \hat{\Gamma}\theta$.*

Symbol $\mathcal{T}(\theta H^2, H_-^2)$ oznacza zbiór tych wszystkich operatorów $\hat{\Gamma} \in \mathcal{B}(\theta H^2, H_-^2)$, które są zdefiniowane w następujący sposób:

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_\varphi^\theta = P^- M_\varphi|_{\theta H^2}$$

dla pewnej funkcji $\varphi \in L^\infty$. Operatory T_φ^θ oraz \check{T}_φ to oczywiście

$$P_{\theta H^2} M_\varphi|_{\theta H^2} \text{ oraz } P^- M_\varphi|_{H_-^2},$$

odpowiednio. Także ten wynik jest ładnym uogólnieniem klasycznej teorii.

Artykuł [O3] dotyczy centralnego dla osiągnięcia naukowego pojęcia sprzężenia. Przypomnijmy, że sprzężeniem C na przestrzeni Hilberta \mathcal{H} nazywamy antyliniową izometryczną inwolucję,

$$\langle Cg, Ch \rangle = \langle g, h \rangle, \quad \text{dla } g, h \in \mathcal{H}.$$

Głównym obiektem zainteresowania są operatory $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ spełniające warunek

$$CAC^* = A^*,$$

nazywane C -symetrycznymi. Twierdzenie 2.4 w [O3] dostarcza prostej, ale ciekawej charakteryzacji tych sprzężeń, które 'komutują' z operatorem mnożenia M_z na L^2 (dokładnie $M_z C = C M_{\bar{z}}$). Są to po prostu te operacje C , które są postaci $M_\psi J^*$. Operator J^* zdefiniowany jest w następujący sposób

$$J^* f = f^\#,$$

gdzie $f^\# = \overline{f(\bar{z})}$ dla $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Moją uwagę w pracy [O3] zwrócił cały rozdział 4 poświęcony badaniu sprzężeń zachowujących przestrzenie modelowe, jak już wspominałem jest to bardzo aktualna tematyka badań. Ciekawy jest wniosek 4.3 z omawianej pracy.

Corollary 1 (Corollary 4.3, O3). *Let α, θ be nonconstant inner functions, and let C be a conjugation in L^2 such that $M_z C = C M_{\bar{z}}$. Assume that $C(K_\alpha) \subset K_\theta$. Then $\alpha \leq \theta$ and there is an inner function β such that $C = C_\beta$, with $\alpha \leq \beta \leq \theta$.*

Dla dowolnych funkcji wewnętrznych α, θ wyrażenie $\alpha \leq \theta$ oznacza, że α dzieli θ . Należy podkreślić, że operator sprzężenia C_θ jest w ogóle bardzo ważny w recenzowanych pracach. Jest on zdefiniowany zależnością

$$C_\theta f = \theta \bar{z} \bar{f}, \quad f \in L^2.$$

Okazuje się, że zachowuje on przestrzeń modelową K_θ .

Praca [O5] poświęcona jest także badaniu asymetrycznych obciążonych operatorów Toeplitza na przestrzeniach modelowych. Moją szczególną uwagę zwróciło twierdzenie 4.3 w omawianej pracy, o nietrywialnym, skomplikowanym dowodzie.

Theorem 3. *Let θ, α be nonconstant inner functions. The operator $D \in \mathcal{B}(K_\theta^\perp, K_\alpha^\perp)$ spełnia warunki*

$$D D_z^\theta = D_z^\alpha D$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $D \in \mathcal{T}^2(K_\theta^\perp, K_\alpha^\perp)$.

Operator D_φ^θ zdefiniowany jest jako

$$P_\alpha^\perp M_\varphi |_{K_\theta^\perp \cap L^\infty}.$$

Jest to asymetryczny dualny obciążony operator Toeplitza. Przestrzeń $\mathcal{T}^2(K_\theta^\perp, K_\alpha^\perp)$ to przestrzeń tych wszystkich operatorów, które są postaci

$$D = \begin{pmatrix} \hat{T}_{\varphi_1}^{\theta, \alpha} & \check{T}_{\varphi_2}^\alpha \\ \hat{T}_{\varphi_3}^\theta & \check{T}_{\varphi_4} \end{pmatrix}.$$

Wyrazy tej macierzy to odpowiednio zdefiniowane operatory Toeplitza i Hankela. Podobnie jak wiele twierdzeń w omawianych pracach także to jest uogólnieniem klasycznych wyników.

Praca [O8] dotyczy innego naturalnego problemu. Mianowicie poświęcona jest ona zagadnieniu uzupełniania macierzy. To znaczy dane są pewne wyrazy macierzy prostokątnej. Problem polega na znalezieniu nieznanymi wyrazów macierzy, tak aby spełniała ona zadane własności. Podane są warunki na przykład na to, aby zdefiniowany już uprzednio operator $A_\varphi^{\theta, \alpha}$ można było uzupełnić do C_θ symetrycznego operatora w $\mathcal{B}(K_\theta^2)$. Zagadnieniu temu poświęcony jest cały rozdział 4 pracy [O5].

Praca [O6] poświęcona jest między innymi badaniu operacji sprzężenia komutujących z operatorem M_z działającym na $L^2(\mathcal{H})$, gdzie \mathcal{H} jest ośrodkową przestrzenią Hilberta. Wydaje mi się, że najważniejsze twierdzenie w pracy brzmi następująco.

Theorem 4 (Theorem 4.3, O6). *Let J be a conjugation in \mathcal{H} . Then the following conditions are equivalent:*

1. \mathbf{C} is a conjugation in $L^2(\mathcal{H})$ such that $\mathbf{C} M_z = M_z \mathbf{C}$.
2. There is $\mathbf{U} \in L^\infty(L(\mathcal{H}))$ such that $\mathbf{U}(z)$ is a unitary operator for almost all $z \in \mathbb{T}$, M_U is J^* -symmetric and $\mathbf{C} = M_U \mathbf{J}^*$.

Operatory na $L^2(\mathcal{H})$ otrzymuje się w naturalny sposób uogólniając przypadek skalarny. Na przykład, występujące w twierdzeniu sprzężenie \mathbf{J}^* zdefiniowane jest jako

$$(\mathbf{J}^* f)(z) = J(f(\bar{z})),$$

gdzie J jest rozważanym już (skalarnym) sprzężeniem oraz $f \in L^2(\mathcal{H})$. Szczerze mówiąc wyniki tej pracy nie stanowiły dla mnie zaskoczenia. Nie zmienia to faktu, że jest to porządna matematyczna robota. Dużą przyjemność sprawiło mi przeczytanie wstępu w tej pracy.

W pracy [O7] autorzy badają ponownie asymetryczne obcięte operatory Toeplitza. Rozważane jest podobnie sprzężenie C_θ , które przypomnijmy zdefiniowane jest wzorem

$$(1) \quad C_\theta(f) = \theta \bar{z} f, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Sprzężenie to zachowuje przestrzeń modelową K_θ . Co ważne, obcięte operatory Toeplitza A są C_θ -symetryczne

$$AC_\theta - C_\theta A^* = 0.$$

Moją uwagę zwróciło szczególnie Twierdzenie 4.3, które mówi, że jeżeli C jest M_z -sprzężeniem w L^2 , to znaczy

$$M_z C = C M_z,$$

gdzie M_z jest operatorem mnożenia przez z oraz C zachowuje przestrzeń modelową

$$C(K_\theta) \subset K_\theta$$

dla pewnej niestalej funkcji wewnętrznej θ , to C jest zdefiniowanym w (1) sprzężeniem C_θ . To ładny i naturalny wynik (logicznie poprzedza on oczywiście Wniosek 1).

Praca [O4] dotyczy bardzo ważnego w teorii operatorów pojęcia przechodniości k -tranzytywności. Udowodnione zostało między innymi następujące twierdzenie.

Theorem 5 (Theorem 5.1, O4). *Let θ, α be two nonconstant inner functions. The space $\mathcal{T}(K_\theta, K_\alpha)$ of all bounded asymmetric truncated Toeplitz operators is weak-* (WOT)-closed, transitive and 2-reflexive.*

Podobnie jak wiele innych twierdzeń w omawianych pracach to ciekawy i ważny wynik.

Przytoczyłem tylko kilka wybranych twierdzeń, takich, które zwróciły moją uwagę. Wcale nie twierdzą, że w omawianych pracach nie ma wyników, które można by uznać za ważniejsze. Po prostu te wydawały mi się najciekawsze. Nie mam żadnej wątpliwości, że przedstawione osiągnięcie może być podstawą nadania stopnia doktora habilitowanego. To naprawdę dobra, nietrywialna i ważna matematyka. Udowodnione twierdzenia świadczą o głębokim rozumieniu badanych obiektów i świetnym opanowaniu technik dowodowych tej teorii. Moja jedyna wątpliwość i uwaga dotyczy tego, że wszystkie te prace napisane są przez zespół matematyków. Zdaje sobie sprawę, że mój sposób uprawiania matematyki - pracuję sam, jest raczej obecnie niepopularny. Co więcej, wszyscy zachęceni są do współpracy i często wynik osiągnięty przez grupę jest ceniony wyżej niż samodzielny. Mam jednak wątpliwość, czy podstawą nadania stopnia doktora habilitowanego, stopnia, który ma świadczyć o samodzielności naukowej powinny być tylko prace współautorskie. Nie

mam jednak żadnych podstaw, aby wątpić w deklarowany przez autorów prac stanowiących osiągnięcie naukowe wkład Pani dr Kamili Kliś-Garlickiej. Wnioskuje zatem na podstawie przedstawionego osiągnięcia naukowego oraz biorąc pod uwagę pozostałą aktywność Pani dr Kamili Kliś-Garlickiej o nadanie Jej stopnia doktora habilitowanego.

Michał Jasiczak