Warszawa, 18 października 2024

dr hab. Tomasz Kochanek
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Recenzja w postępowaniu w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego dr Kamili Kliś-Garlickiej

Pani dr Kamila Kliś-Garlicka jako osiągnięcie naukowe będące podstawą ubiegania się o nadanie stopnia doktora habilitowanego przedstawiła cykl ośmiu prac opublikowanych w latach 2017–2022 zatytułowany

Zawężenia operatorów mnożenia na przestrzeni L^2 z miarą Lebesgue'a na okręgu jednostkowym i operatory sprzężenia.

Wszystkie z tych prac zostały napisane wspólnie ze współautorami, którymi są: M.C. Câmara i M. Ptak (wszystkie prace wspólne), B. Łanucha (pięć wspólnych prac) oraz J. Jurasik (jedna wspólna praca). Na podstawie dołączonych do wniosku oświadczeń – tak współautorów, jak i samej Habilitantki – można stwierdzić, że wkład pani dr Kliś-Garlickiej w napisanie wspomnianych ośmiu prac cyklu nieznacznie przewyższa proporcjonalny wkład wynikający z liczby autorów każdej z tych publikacji. Odpowiada to w przybliżeniu dwóm i pół artykułom samodzielnym, co jest wynikiem dość niskim jak na wniosek o przyznanie stopnia doktora habilitowanego. Jak zaznaczyłem powyżej, współautorami każdej pracy wchodzącej w skład osiągnięcia byli M.C. Câmara i M. Ptak, co z jednej strony może świadczyć o umiejętności nawiązywania i prowadzenia stałej współpracy, ale z drugiej – może budzić wątpliwości co do możliwości Habilitantki w kwestii stawiania pytań badawczych i prowadzenia samodzielnych badań.

Do wniosku dołączony został autoreferat zawierający podsumowanie wyników zawartych we wspomnianych wyżej pracach, jak również opis pozostałych osiągnięć Habilitantki. W mojej opinii sposób, w jaki został napisany autoreferat powoduje, że jest on dość trudny w lekturze; poza nielicznymi fragmentami tekst składa się bowiem z technicznie skomplikowanych wypowiedzi kolejnych twierdzeń, a brakuje opisów heurystycznych, naszkicowania głównych idei, strategii dowodowych, czy też odpowiedniego wyjaśnienia motywacji prowadzonych badań (nie licząc kilku raczej ogólnikowych fragmentów). Faktem jest, że natura omawianych twierdzeń powoduje, że nie sposób uniknąć technicznych i skomplikowanych wypowiedzi. Wydaje się jednak, że przygotowanie nieco bardziej rozbudowanego wstępu i dokładniejsze wyjaśnienie motywacji zajmowania się poszczególnymi problemami znacznie ułatwiłoby odbiór tekstu, a przecież przekonujące, poglądowe przedstawianie swoich idei i motywacji jest również ważną umiejętnością w działalności matematycznej.

Przejdę poniżej do opisu i oceny poszczególnych artykułów wchodzących w skład osiągnięcia naukowego. Głównymi obiektami badań Habilitantki są obcięte (asymetryczne) operatory Toeplitza, operatory sprzężenia oraz operatory względem nich symetryczne. Przypomnijmy, że operator Toeplitza na standardowej przestrzeni Hardy'ego H^2 to złożenie operatora mnożenia z ortogonalną projekcją $L^2 \to H^2$, przy czym H^2 utożsamiamy z podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $L^2(\mathbb{T})$ (klas abstrakcji funkcji całkowalnych z kwadratem w sensie Lebesgue'a na okręgu jednostkowym) złożoną z tych funkcji $f \in L^2(\mathbb{T})$, dla których współczynniki Fouriera spełniają $\hat{f}(n) = 0$ dla $n \leqslant -1$. Teoria obciętych operatorów Toeplitza rozwinięta została głównie w ważnej pracy Sarasona (*Operators and Matrices* 2007), w której zamiast rzutowania na przestrzeń Hardy'ego rozważał on rzutowania na tzw. *przestrzenie modelowe*, które są różnicami prostymi postaci $K_\theta^2 = H^2 \ominus \theta H^2$, gdzie $\theta \in H^\infty$ jest niestałą *funkcją wewnętrzną*, tj. ograniczoną funkcją holomorficzną na dysku $\mathbb{D}$ spełniającą $|\theta| = 1$ prawie wszędzie na $\mathbb{T}$. Dla dowolnej funkcji (symbolu) $\varphi \in L^2$ odpowiadający jej obcięty operator Toeplitza A_φ na K_θ^2 zdefiniowany jest wzorem

$$A_\varphi f = P_\theta(\varphi f),$$

gdzie P_θ jest rzutowaniem na K_θ^2. Ważną z punktu widzenia badań Habilitantki obserwacją jest to, że każda funkcja wewnętrzna θ indukuje operator sprzężenia na L^2 według wzoru

$$C_\theta f(z) = \theta(z)\overline{zf(z)},$$

a przestrzeń modelowa K_θ^2 jest ponadto C_θ-niezmiennicza, co oznacza, że możemy mówić o C_θ-symetryczności w kontekście operatorów działających z K_θ^2 w siebie. Wyniki zawarte w omawianym cyklu prac dotyczą w dużej mierze operatorów sprzężeń oraz odpowiadających im własności symetryczności, jak również pojęcia asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza, które zostało zaproponowane w pracy M.C. Câmary i J.R. Partingtona (*J. Oper. Theory* 2017) w kontekście przestrzeni Hardy'ego H^p na górnej półpłaszczyźnie. W wersji badanej przez Habilitantkę ze współautorami operatory takie są postaci

$$A_\varphi^{\theta,\alpha} f = P_\alpha(\varphi f),$$

gdzie α, θ są niestałymi funkcjami wewnętrznymi, natomiast dziedziną operatora jest podzbiór $\mathcal{D}$ przestrzeni modelowej K_θ^2 złożony z tych f, dla których $\varphi f \in L^2$. Okazuje się, że operator $A_\varphi^{\theta,\alpha}$ jest domknięty i gęsto określony na K_θ^2.

W artykule

[O1] M.C. Câmara, J. Jurasik, K. Kliś-Garlicka, M. Ptak, *Characterizations of asymmetric truncated Toeplitz operators*, Banach J. Math. Anal. **11** (2017), 899–922

autorzy zajmowali się przestrzenią $\mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$ *ograniczonych* asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza (będziemy w dalszym ciągu, jak w autoreferacie, używali skrótu ATTO od ang. *asymmetric truncated Toeplitz operator*). Uzyskano szereg własności tej przestrzeni oraz związków między ograniczonymi ATTO a odpowiadającymi im symbolami. Godne odnotowania jest twierdzenie [O1; Thm. 4.4] podające warunek konieczny i dostateczny na zerowanie się operatora $A_\varphi^{\theta,\alpha}$ w języku funkcji φ, α, θ. Uzyskano też analogon wyniku Sarasona o charakteryzacji obciętych operatorów Toeplitza wśród operatorów ograniczonych przez operatory rzędu dwa ([O1; Thm. 6.1]) przy wykorzystaniu jądra

dl

reprodukującego. Jest to elegancki wynik, który przy stosownych założeniach podaje konkretną relację charakteryzującą to, że dany operator ograniczony należy do $\mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$. Praca zawiera ciekawe wyniki, które w naturalny sposób rozwijają wcześniej funkcjonującą teorię.

Motywacją dla artykułu

[O7] M.C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, M. Ptak, *Asymmetric truncated Toeplitz operators and conjugations*, Filomat **33** (2019), 3697–3710

była C_θ-symetryczność obciętych operatorów Toeplitza, tj. własność $A_\varphi^\theta C_\theta = C_\theta A_{\overline{\varphi}}^\theta$, oraz poszukiwanie jej analogonu w przypadku asymetrycznym. Główny wynik ([O7; Thm. 5.3]) mówi między innymi, że pod założeniem, że α 'dzieli' θ ($\alpha \leqslant \theta$) odpowiednio rozumiane sumy proste operatorów postaci $A_\varphi^{\theta,\alpha}$ i $A_{\varphi\overline{\alpha}}^{\theta,\theta/\alpha}$, czy też $A_\varphi^{\theta,\alpha}$ i $A_{\varphi\theta/\alpha}^{\theta,\theta/\alpha}$, są antyliniowo sprzężone względem odpowiednio C_θ i $C_{\alpha,\theta/\alpha}$. Uzyskane formuły są być może interesujące, bo pokazują jakiego rodzaju symetrii można spodziewać się w przypadku rozważanej przez autorów modyfikacji obciętych operatorów Toeplitza, jednak ich wyprowadzenia są niemal czysto rachunkowe i trudno doszukać się w nich jakiejś głębszej idei dowodowej. Wspomniane wzory na antyliniową sprzężoność są niemniej ładnie zilustrowane szeregiem przykładów, które – zgodnie z odpowiednim oświadczeniem – są wszystkie autorstwa Habilitantki.

Kolejną omawianą w autoreferacie pracą jest artykuł

[O8] M.C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, M. Ptak, *Complex symmetric completions of partial operator matrices*, Lin. Multili. Alg. **69** (2021), 1446–1467

dotyczący problemu uzupełniania macierzy częściowych w taki sposób, aby uzyskać żądaną własność, lub ogólniej – uzupełniania macierzy operatorów, gdzie interesującą nas własnością jest C-symetryczność przy ustalonym operatorze sprzężenia C. Autorzy charakteryzują C-symetryczność dla pewnych operatorów Wienera-Hopfa i operatorów Toeplitza, a następnie zajmują się problemem uzupełniania operatora $A_1 \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ do C-symetrycznego operatora $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, gdzie $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ jest ustalonym rozbiciem przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ na sumę prostą, jak również problemem opisu możliwych uzupełnień. Techniczny wynik [O8; Thm. 4.3] podaje warunki równoważne istnieniu odpowiedniego uzupełnienia w ogólnej sytuacji, i jest on następnie zastosowany do C_θ-symetrycznego uzupełnienia ATTO postaci $A_\varphi^{\theta,\alpha}$ przy założeniu $\alpha \leqslant \theta$, jak również do opisu zbioru wszystkich C_θ-symetrycznych uzupełnień. W przypadku, gdy $\varphi \in L^\infty$ ATTO $A_\varphi^{\theta,\alpha}$ może być uzupełniony do obciętego operatora Toeplitza A_φ^θ, jednak tak tutaj, jak i w przypadku, gdy $\varphi \in L^2 \setminus L^\infty$ takich uzupełnień w klasie obciętych operatorów Toeplitza jest więcej i są to dokładnie operatory postaci A_g^θ przy $g - \varphi \in \alpha H^2 + \overline{\theta H^2}$ takich, że $A_{g\overline{\alpha}}^{\theta/\alpha} \in \mathcal{T}(K_{\theta/\alpha}^2)$. Wymienione wyżej wyniki zawarte są w twierdzeniach [O8; Thms. 4.5, 4.7]. Tego samego rodzaju wynik ([O8; Thm. 4.8]) podaje opis $C_{\alpha,\theta/\alpha}$-symetrycznych uzupełnień dla ATTO $A_\varphi^{\theta,\alpha}$. Artykuł zawiera również podobne rezultaty dotyczące symetrycznych uzupełnień dla operatorów Toeplitza z symbolem macierzowym $G \in \mathbb{M}_2(\mathcal{H})$ oraz pewnych operatorów Wienera-Hopfa. Dowody twierdzeń zawartych w tej pracy wymagały z pewnością sporej biegłości technicznej, ale nie wychodzą poza trudności rachunkowe i elementarne operowanie projekcjami w przestrzeniach Hilberta.

Omawiane następnie trzy artykuły dotyczą tematu dualnych ATTO; są to prace:

[O2] M.C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, M. Ptak, *Compressions of multiplication operators and their characterizations*, Results in Math. **157** (2020), 23 pp.

[O5] M.C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, M. Ptak, *Intertwining property for compressions of multiplication operators*, Results in Math. **77** (2022), 20 pp.

[O6] M.C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, M. Ptak, *Shift invariance and reflexivity of compressions of multiplication operators*, Forum Math. **34** (2022), 893–905.

Dualne ATTO to zawężenia operatorów mnożenia do dopełnień ortogonalnych podprzestrzeni modelowych $L^2(\mathbb{T})$ i, jak w swoim autoreferacie wyjaśnia Habilitantka, ich własności istotnie różnią się od własności obciętych operatorów Toeplitza, np. tym, że ich symbol wyznaczony jest jednoznacznie. Niech M_φ oznacza operator mnożenia przez ustaloną funkcję $\varphi \in L^2$, a α, θ będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi. Jeżeli operator

$$D_\varphi^\theta = P_\theta^\perp M_{\varphi|(K_\theta^2)^\perp \cap L^\infty} \quad \text{(odpowiednio: } D_\varphi^{\theta,\alpha} = P_\alpha^\perp M_{\varphi|(K_\theta^2)^\perp \cap L^\infty})$$

ma ograniczone rozszerzenie do przestrzeni $(K_\theta^2)^\perp$, to nazywamy go (odpowiednio: *asymetrycznym*) dualnym obciętym operatorem Toeplitza, w skrócie DTTO (odpowiednio: ADTTO). Artykuł [O2] zawiera m.in. charakteryzację operatorów rzędu jeden wśród dualnych obciętych operatorów Toeplitza ([O2; Thm. 6]), obliczenie komutatora $[D_\varphi^\theta, D_z^\theta]$ (i innych podobnych; [O2; Thm. 11]) oraz charakteryzację DTTO wśród operatorów ograniczonych na $(K_\theta^2)^\perp$ wraz ze wzorem na symbol takiego operatora ([O2; Thm. 27]). Dowody wymienionych twierdzeń są dość złożone i oprócz skomplikowanych rachunków wymagały też sprytnego użycia pewnych technik analizy zespolonej, jak np. produkty Blaschkego, czy też twierdzenia Ma, Yan, Zhenga (*Proc. Amer. Math. Soc.* 2018) o charakteryzacji *dużych obciętych operatorów Hankela* skończonego rzędu.

W artykule [O5] autorzy zajmują się operatorami ADTTO i problemem komutacji z operatorami D_z^α i D_z^θ, a dokładniej relacją $DD_z^\theta = D_z^\alpha D$. Główny wynik ([O5; Thm. 4.3]) mówi, że ograniczony operator $D\colon (K_\theta^2)^\perp \to (K_\alpha^2)^\perp$ spełnia powyższą relację wtedy i tylko wtedy, gdy D ma postać macierzową

$$(*) \qquad D = \begin{bmatrix} \hat{T}_{\psi_1}^{\theta,\alpha} & \check{\Gamma}_{\psi_2}^{\alpha} \\ \hat{\Gamma}_{\psi_3}^{\theta} & \check{T}_{\psi_4} \end{bmatrix}$$

względem rozkładów

$$(K_\theta^2)^\perp = \theta H^2 \oplus H_-^2, \quad (K_\alpha^2)^\perp = \alpha H^2 \oplus H_-^2, \quad \text{gdzie } H_-^2 = \overline{zH^2},$$

oraz gdzie

$$\hat{T}_\varphi^{\theta,\alpha} = P_{\alpha H^2} M_{\varphi|\theta H^2},\ \check{T}_\varphi = P^- M_{\varphi|H_-^2},\ \hat{\Gamma}_\varphi^\theta = P^- M_{\varphi|H^2},\ \check{\Gamma}_\varphi^\alpha = P_{\alpha H^2} M_{\varphi|H_-^2},$$

a funkcje $\psi_i \in L^2$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ są określone konkretnymi warunkami. Dowód jest bardzo techniczny, ale nietrywialny; istotnym krokiem było użycie twierdzenia charakteryzującego niezmiennicze względem przesunięcia operatory z $\mathcal{B}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$, które to twierdzenie pochodzi z pracy [O6]. W pracy tej znajduje się wynik uogólniający wcześniejsze twierdzenie z [O2], który podaje charakteryzację ADTTO poprzez szereg technicznych warunków

dl

([O2; Thm. 3.4]). Autorzy, motywowani znaną wcześniej i pochodzącą od Sarasona charakteryzacją obciętych operatorów Toeplitza przez niezmienniczość względem przesunięć, wykazali także (zob. [O6; Thm. 4.3]), że dla dowolnych niestałych funkcji wewnętrznych α, θ operator $D \in \mathcal{B}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$ jest niezmienniczy względem przesunięcia wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $(*)$ z pewnymi $\psi_i \in L^\infty$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Dowody tych faktów są, jak w innych omawianych przypadkach, głównie techniczne i dość skomplikowane rachunkowo. Ciekawsza z punktu widzenia stosowanych metod część pracy zawiera wyniki mówiące, że zarówno podprzestrzeń ograniczonych ATTO, podprzestrzeń wspomnianych wyżej operatorów typu $(*)$, jak i podprzestrzeń operatorów ADTTO, jest domknięta w *-słabej topologii operatorowej i 2-refleksywna, przy czym dwie pierwsze są też tranzytywne. Nieoczywisty dowód wykorzystujący rachunek funkcyjny i twierdzenie Bourgaina związane z problemem Douglasa i Rudina (jak również jego modyfikację pochodzącą od E.A. Azoffa i M. Ptaka; *J. Funct. Anal.* 1998) prowadzi do wyniku [O6; Thm. 6.3] mówiącego, że przestrzeń operatorów ADTTO ma pewną techniczną własność $\mathbb{A}_{1/2}(1)$, która implikuje, że każda *-słabo domknięta podprzestrzeń przestrzeni ograniczonych ADTTO z symbolem $\varphi \in L^2$ jest 2-refleksywna.

W dwóch ostatnich pracach wchodzących w skład osiągnięcia naukowego:

[O3] M.C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, M. Ptak, *Conjugations in L^2 and their invariants*, Anal. Math. Phys. **10** (2020), 14 pp.

[O4] M.C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, M. Ptak, *Conjugations in $L^2(H)$*, Integr. Eq. Oper. Theory **92** (2020), 25 pp.

autorzy zajmowali się operatorami sprzężenia w przestrzeni L^2 oraz w przypadku wektorowym, tj. dla przestrzeni $L^2(\mathcal{H})$ mierzalnych funkcji $f\colon \mathbb{T} \to \mathcal{H}$ spełniających

$$\int_{\mathbb{T}} \|f(z)\|^2 \, \mathrm{d}z < \infty.$$

We wcześniejszej pracy [O7] podano charakteryzację takich operatorów sprzężenia C, że operator mnożenia M_z jest C-symetryczny, tzn. spełnia równość $M_z C = C M_{\overline{z}}$. Twierdzenie [O3; Thm. 2.4] z nietrudnym dowodem podaje podobną charakteryzację dla równości $M_z C = C M_z$. W pracy [O3] odnajdujemy również szereg twierdzeń opisujących operatory sprzężenia C spełniające jedną z wyżej wymienionych równości wraz z warunkami np. typu $C(H^2) \subset H^2$, $C(\gamma K_\alpha^2) \subset K_\theta^2$, czy też $C(K_\alpha^2) \subset K_\theta^2$, gdzie α, γ, θ są funkcjami wewnętrznymi. Dowody nie są trudne i w gruncie rzeczy sprowadzają się do skorzystania ze wspomnianych charakteryzacji sprzężeń komutujących z M_z bądź tych, dla których M_z jest C-symetryczny.

W pracy [O4] wprowadzono definicje wektorowych analogonów $\widetilde{\mathbf{J}}$ i $\mathbf{J}^\star$ dwóch najbardziej klasycznych sprzężeń w L^2, tj. $\widetilde{J} f = \overline{f}$ oraz $J^\star f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ i, ogólniej, dla dowolnego operatora sprzężenia J na $\mathcal{H}$ określono stowarzyszone z nim sprzężenia $\widetilde{\mathbf{J}}\mathbf{f}(z) = J(\mathbf{f}(z))$ oraz $\mathbf{J}^\star \mathbf{f}(z) = J(\mathbf{f}(\overline{z}))$. W [O4; Thms. 4.3, 4.8] wyprowadzono wektorowe wersje charakteryzacji sprzężeń w $L^2(\mathcal{H})$ spełniających warunek $\mathbf{C}\mathbf{M}_z = \mathbf{M}_z\mathbf{C}$ lub $\mathbf{M}_z\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{M}_{\overline{z}}$, gdzie $\mathbf{M}_z\mathbf{f}(z) = z\mathbf{f}(z)$ oraz $\mathbf{M}_{\overline{z}}\mathbf{f}(z) = \overline{z}\mathbf{f}(z)$. Podobnie uzyskano wektorowy analogon charakteryzacji sprzężeń zachowujących przestrzeń Hardy'ego – w tym przypadku mówimy o przestrzeni $H^2(\mathcal{H})$ funkcji z $L^2(\mathcal{H})$, których wszystkie współczynniki Fouriera z ujemnymi indeksami znikają. W dalszej części pracy autorzy rozważają wektorowe

dh

funkcje wewnętrzne $\Theta \in H^\infty(L(\mathcal{H}))$, tj. funkcje $\mathbf{F}\colon \mathbb{D} \to L(\mathcal{H})$ ograniczone i holomorficzne na $\mathbb{D}$, których wartości na okręgu $\mathbb{T}$ są prawie wszędzie operatorami unitarnymi. Pozwoliło to na określenie odpowiadającej takim funkcjom przestrzeni modelowej $K_\Theta = H^2(\mathcal{H}) \ominus \Theta H^2(\mathcal{H})$ i uzyskanie szeregu wektorowych analogonów wymienionych wcześniej twierdzeń, np. charakteryzacji $\mathbf{M}_z$-sprzężeń z niezmienniczą przestrzenią modelową ([O4; Thm. 6.6]), opisu $\mathbf{M}_z$-sprzężeń i $\mathbf{M}_z$-przemiennych sprzężeń przekształcających jedną przestrzeń modelową w drugą ([O4; Thms. 7.3, 7.8]), a także charakteryzacji warunku istnienia $\mathbf{M}_z$-komutującego sprzężenia $\mathbf{C}$ spełniającego $\mathbf{C}(\Lambda H^2(\mathcal{H})) \subset \Theta H^2(\mathcal{H})$ dla ustalonych funkcji wewnętrznych $\Theta, \Lambda \in H^\infty(L(\mathcal{H}))$. Praca ta naturalnie rozwija uzyskane wcześniej wyniki, ale trudno powiedzieć, aby wprowadzała jakieś nowe techniki dowodowe.

Ocena pozostałych osiągnięć naukowych i konkluzja

Pani dr Kamila Kliś-Garlicka jest autorką 24 publikacji naukowych z matematyki, z których 13 zostało wymienionych w autoreferacie, w spisie publikacji niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego. Jej prace publikowane są na ogół w dobrych czasopismach ale raczej niezaliczanych do ścisłej czołówki w dziedzinie analizy funkcjonalnej. W dorobku Habilitantki znajduje się kilka prac jednoautorskich, co jest dobrym sygnałem w świetle tego, że zgłoszone osiągnięcie naukowe takich prac nie zawiera, a składa się wyłącznie z artykułów napisanych wspólnie ze ściśle określoną, zamkniętą grupą współpracowników.

Tematyka prac niewskazanych w osiągnięciu naukowym jest zbliżona do tej omawianej powyżej. Dotyczy ona m.in. refleksywności i tranzytywności pewnych podprzestrzeni operatorów (np. operatorów C-symetrycznych, lub C-skośnie symetrycznych), badania bikrat projekcji w przestrzeniach Hilberta, operatorowej refleksywności i hiperrefleksywności krat projekcji. Uzyskane rezultaty wymagały z pewnością pewnej biegłości i rozeznania w teorii operatorów. Cały zestaw 24 prac pani dr Kliś-Garlickiej tworzy całkiem dobry dorobek naukowy. Warto również zaznaczyć, że Habilitantka jest nieprzerwanie aktywna naukowo, na co wskazują dwa artykuły opublikowane w roku 2024; jeden z nich ukazał się w *Canadian J. Math.*

Dane naukometryczne Habilitantki są zadowalające. Według bazy Web of Science jej prace cytowane były 77-krotnie nie licząc autocytowań, a jej indeks Hirscha wynosi 7. Pani dr Kliś-Garlicka odbyła kilka staży naukowych, podczas których nawiązywała współpracę naukową m.in. z Vladimirem Müllerem w Instytucie Matematycznym Czeskiej Akademii Nauk i Iwanem Todorowem w Queen's University w Belfaście. Jest ona współautorką prac napisanych wspólnie z obydwoma tymi matematykami. Habilitantka recenzowała także artykuły dla wielu czasopism matematycznych, w tym dla prestiżowego *J. London Math. Soc.* Była współorganizatorką cyklu konferencji SWOT (*Small/Summer Workshop on Operator Theory*), a także konferencji IWOTA (*International Workshop on Operator Theory and its Applications*) w roku 2022. Na uwagę zasługuje też uzyskana w roku 2021 nagroda za najlepszą pracę roku opublikowaną w *Banach J. Math. Anal.* Pani dr Kliś-Garlicka brała także udział w dwóch projektach badawczych – jednym polsko-słoweńskim i jednym finansowanym z grantu KBN.

Chociaż nie odniosłem wrażenia, aby prace składające się na osiągnięcie naukowe Habilitantki zawierały jakiś przełomowy wynik, czy też wprowadzały nowe, pomysłowe techniki dowodowe, myślę, że można je uznać za znaczący wkład w rozwój teorii operatorów na przestrzeniach Hilberta. Przedstawione do oceny artykuły oparte są bardziej

dh

na solidnym warsztacie niż nowatorstwie, ale na pewno stanowią one cykl powiązanych tematycznie prac, które przyczyniły się do rozwoju i zrozumienia szeregu zagadnień związanych z operatorami Toeplitza i zagadnieniami pokrewnymi. W świetle opisanych wyżej innych dokonań Habilitantki stwierdzam również, że wykazuje się ona istotną aktywnością naukową.

Podsumowując – uważam, że przedstawione mi do oceny osiągnięcie naukowe oraz pozostały dorobek i aktywność naukowa Habilitantki spełniają minimalne wymagania określone w art. 219 ust. 1 pkt 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce. **Popieram zatem wniosek o nadanie pani dr Kamili Kliś-Garlickiej stopnia doktora habilitowanego.**