

Warszawa, 28. 10. 2024  
prof. dr hab. Yuriy Tomilov  
Instytut Matematyczny  
Polskiej Akademii Nauk  
ul. Śniadeckich 8  
00-656 Warszawa

**Recenzja w postępowaniu o nadanie  
stopnia doktora habilitowanego  
dr Kamile Kliś-Gatlickiej**

**Przebieg kariery Habilitantki.** Dr Kamila Kliś-Gatlicka jest absolwentką Uniwersytetu Jagiellońskiego, który ukończyła w 1996 roku. W roku 2003 uzyskała stopień doktora w Instytucie Matematycznym PAN na podstawie rozprawy doktorskiej pt. „Hyperrefleksywność i  $k$ -hyperrefleksywność podprzestrzeni operatorów” pod kierunkiem prof. dra hab. Marka Ptaka. Od 1996 r. Habilitantka pracuje na Uniwersytecie Rolniczym w Krakowie, od roku 2004 na stanowisku adiunkta.

**Kontekst osiągnięcia naukowego, jego tematyka i zakres.** Swoją drogę w matematyce, dr Kliś-Gatlicka zaczęła od badań w zakresie algebr operatorowych, i uzyskała szereg ciekawych wyników w tym wymagającym dziale analizy funkcjonalnej. Jednak w przeciągu ostatnich dziesięciu lat zmieniła ona swoje zainteresowania, skupiając się na wyjaśnieniu struktury obciętych operatorów Toeplitza oraz pokrewnych zagadnień, z naciskiem na badaniu własności algebraicznych, związanych z pojęciem operatorów  $C$ -symetrycznych.

Tematyka obciętych operatorów Toeplitza została zainicjowana w przełomowych pracach Sarasona (2007, 2008), choć w nieco innych ujęciach takie operatory były badane znacznie wcześniej (np. przez Aherna i Clarka w latach 70-tych). Prace Sarasona przyczyniły się do rychłego rozwoju teorii obciętych operatorów Toeplitza. Podstawową rolę w tej teorii odgrywają przestrzenie modelowe  $K_\theta := H^2 \ominus \theta H^2$ , gdzie  $H^2 = H^2(\mathbb{T})$  jest przestrzenią Hardy’ego na kole jednostkowym  $\mathbb{T}$ , a  $\theta$  jest funkcją wewnętrzną w  $H^2$  różną od stałej. Przestrzenie modelowe są podstawowym narzędziem w konstruowaniu modeli funkcyjnych dla szerokich klas kontrakcji na przestrzeni Hilberta. Dla  $\varphi \in L^2 = L^2(\mathbb{T})$ , oraz funkcji wewnętrznych  $\theta, \alpha \in H^2$  (różnych od stałych), oznaczając przez  $P_\alpha$  rzut ortogonalny na  $K_\alpha$ , można rozważyć gęsto określone operatory  $M_\varphi : L^2 \rightarrow L^2$ ,  $M_\varphi f = \varphi f$ , z naturalną dziedziną,

$$A_\varphi^{\theta, \alpha} : K_\theta \rightarrow K_\alpha, \quad A_\varphi^{\theta, \alpha} := P_\alpha M_\varphi|_{K_\theta \cap L^\infty},$$

i

$$D_\varphi^{\theta, \alpha} : K_\theta^\perp \rightarrow K_\alpha^\perp, \quad D_\varphi^{\theta, \alpha} := P_\alpha^\perp M_\varphi|_{K_\theta^\perp \cap L^\infty}.$$

(W przypadku  $\theta = \alpha$  oznaczamy  $A_\varphi^\alpha := A_\varphi^{\theta, \alpha}$ ,  $D_\varphi^\alpha := D_\varphi^{\theta, \alpha}$ , gdzie role  $\alpha$  i  $\theta$  są symetryczne.) Zauważmy, że  $K_\theta \cap L^\infty$  i  $K_\theta^\perp \cap L^\infty$  są gęstymi podzbiorkami w odpowiednio  $K_\theta$  i  $K_\theta^\perp$ . Operator  $A_\varphi^{\theta, \alpha}$  nazywa się asymetrycznym obciętym operatorem Toeplitza jeżeli posiada ono ograniczone (wówczas jedyne) rozszerzenie na  $K_\theta$ . W przypadku  $\alpha = \theta$ , jest to klasyczna (symetryczna) definicja

należąca do Sarasona, zaś przypadek ogólny prowadzi do ciekawej i znacznie bardziej obszernej klasy operatorów badanych systematycznie po raz pierwszy z udziałem Habilitantki w [O1] oraz przez Cămaru i Partingtona w m.in. [6]. Z kolei, jeśli  $D_\varphi^{\theta,\alpha}$  rozszerza się w sposób ograniczony na  $K_\theta^\perp$ , to takie rozszerzenie nazywane jest asymetrycznym dualnym obciętych operatorem Toeplitza. Warty podkreślenia jest ten fakt, że  $A_\varphi^{\theta,\alpha}$  zarówno jak i  $D_\varphi^{\theta,\alpha}$  mogą być ograniczone dla nieograniczonej  $\varphi$ . Teoria asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza istotnie różni się od jej dualnego analogonu, a zatem ostatnia stanowi też ciekawy i porównywalnie niedawny obiekt badań. Mimo, że badania obciętych operatorów Toeplitza doczekały się kilku obszernych przeglądów oraz weszły częściowo do kilku monografii naukowych, teoria ich asymetrycznych odpowiedników wciąż czeka na ostateczny kształt.

Jedno z podstawowych podejść do badania obciętych operatorów Toeplitza opiera się na technikach związanych z pojęciami sprzężeń oraz zespolonych operatorów symetrycznych zdefiniowanych na przestrzeni Hilberta  $H$ . Przypomnijmy, że sprzężeniem  $C$  na  $H$  nazywa się involucję antyliniową na  $H$ , taką że  $\langle Cg, Ch \rangle = \langle h, g \rangle$  dla wszystkich  $g, h \in H$ .

Badania sprzężeń dotyczą szerokiego przekroju analizy i są mocno zakorzenione w zastosowaniach, między innymi, w teorii operatorów na przestrzeniach funkcyjnych i niehermitowskiej mechanice kwantowej. Rozwijając zastosowania sprzężeń do teorii operatorów, w cyklu z dwóch prac (TAMS, 2006, 2007) Garcia i Putinar wprowadzili i dogłębnie zbadali pojęcie operatorów  $C$ -symetrycznych, tzn. takich ograniczonych operatorów  $A$  na  $H$ , że  $CAC = A^*$  dla sprzężenia  $C$  na  $H$  (co jest równoważne warunkowi splątania  $AC = CA^*$ ). Pomijając postać sprzężenia  $C$ , operatory  $C$ -symetryczne są często nazywane zespolonymi operatorami symetrycznymi. Od tej pory sprzężenia razem ze stowarzyszonymi zespolonymi operatorami symetrycznymi zaczęły odgrywać istotną rolę w teorii operatorów i jej zastosowaniach. Zatem charakteryzacja wszystkich sprzężeń operatora, często spełniających ponadto pewne dodatkowe założenia, prowadzi do głębszego wyjaśnienia cienkiej, często ukrytej struktury operatora i łączy jego własności analityczne z własnościami algebraicznymi. Szczególnie interesującym obiektem są tu obcięte operatory Toeplitza (lub np. operatory Hankela) i ich wersje, które posiadają bogaty zbiór  $C$ -symetrii.

W przedstawionym osiągnięciu naukowym dr Kliś-Garlicka rozwija teorię zespolonych operatorów symetrycznych w naturalnym i bardzo ogólnym kontekście asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza i ich "dualnych". Znajduje ona analogony klasycznych własności operatorów Toeplitza związanych z przemiennością bądź splątaniem i uzyskuje w ten sposób szereg ich charakteryzacji, czasami nawet dotyczących ujęcia klasycznego. Czerpiąc motywację z teorii obciętych operatorów Toeplitza, dr Kliś-Garlicka systematycznie bada sprzężenia i ich zastosowania w przestrzeniach modelowych i ich dopełnieniach ortogonalnych, zawierając w ten sposób sporo przypadków szczególnych, np. przestrzenie  $L^2$  i  $H^2$ .

**Szczegółowe omówienie osiągnięcia badawczo-naukowego i jego ocena.** Przechodząc do szczegółowego omówienia osiągnięcia naukowego, zauważę, że Habilitantka jest do tej pory autorem 21 opublikowanych prac naukowych z zakresu teorii operatorów i analizy funkcjonalnej, spora część z których dotyczy omawianego osiągnięcia. Za najbardziej wartościowe uważam główne rezultaty prac [O1], [O4], [O6] i [O8]. Są one moim zdaniem na dobrym poziomie merytorycznym oraz potrzebowały nieprzeciętnej inwencji i rozwiniętego warsztatu.

W skład osiągnięć naukowych przedstawionych do oceny w postępowaniu habilitacyjnym wszedł cykl następujących ośmiu prac naukowych pod wspólnym tytułem „Zawężenia operatorów mnożenia na przestrzeni  $L^2$  z miarą Lebesgue’a na okręgu jednostkowym i operatory sprzężenia”:

[O1] M. C. Câmara, J. Jurasik, K. Kliś-Garlicka, and M. Ptak, *Characterizations of asymmetric truncated Toeplitz operators*, Banach J. Math. Anal., 11 (2017), 899-922.

[O2] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, and M. Ptak, *Compressions of multiplication operators and their characterizations*, Results in Mathematics, 75 (2020), 1-13.

[O3] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, and M. Ptak, *Conjugations in  $L^2$  and their invariants*, Anal. Math. Phys., 10 (2020), paper no. 22, 14pp.

[O4] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, and M. Ptak, *Conjugations in  $L^2(H)$* , Integr. Equ. Oper. Theory, 92 (2020), paper no. 48, 25pp.

[O5] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, and M. Ptak, *Intertwining property for compressions of multiplication operators*, Results in Mathematics, 77 (2022), 1-20.

[O6] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, and M. Ptak, *Shift invariance and reflexivity of compressions of multiplication operators*, Forum Mathematicum, 34 (2022), 893-905.

[O7] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, and M. Ptak *Asymmetric truncated Toeplitz operators and conjugations*, Filomat, 33 (2019), 3697-3710.

[O8] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, and M. Ptak *Complex symmetric completions of partial operator matrices*, Lin. Multilin. Alg., 69 (2021), 1446-1467.

Szczegółowe omówienie wyników Habilitantki zacznę od ciekawej pracy [O1], w której zostały wprowadzone i dokładnie zbadane niesymetryczne obcięte operatory Toeplitza  $A_\varphi^{\theta, \alpha}$ ,  $\varphi \in L^2$ , zdefiniowane wyżej, w przypadku gdy  $\alpha$  dzieli  $\theta$ . Między innymi, opisano klasę wszystkich możliwych symboli dla danego obciętego operatora Toeplitza  $A_\varphi^{\theta, \alpha}$  oraz pokazano, że warunek  $\varphi \in \alpha H^2 + \overline{\theta H^2}$  jest konieczny i wystarczający, aby  $A_\varphi^{\theta, \alpha} = 0$ . Głównym wynikiem pracy jest charakteryzacja asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza w terminach pomocniczych operatorów rangi 2, która, jak wykazano w pracy, może przyjmować kilka postaci. Np. operator  $A : K_\theta \rightarrow K_\alpha$  jest obciętym asymetrycznym operatorem Toeplitza tylko jeśli istnieją funkcje wewnętrzne  $\psi \in K_\alpha$  i  $\chi \in K_\theta$  spełniające równość  $A - S_\alpha A S_\theta^* = \psi \otimes k_\theta^0 + k_\alpha^0 \otimes \chi$ , gdzie  $k_\alpha = P_\alpha 1$  i  $k_\theta = P_\theta 1$  są jądrami reprodukującymi, a  $S_\alpha$  i  $S_\theta$  są kompresjami na odpowiednio  $K_\alpha$  i  $K_\theta$  jednostoronnego przesunięcia  $S$  na  $H^2$ . Taka charakteryzacja nawiązuje do klasycznego opisu operatorów Toeplitza, gdzie

prawa strona jest zerem. Podobny wzór można uzyskać w terminach operatorów sprzężenia  $C_\alpha$  i  $C_\theta$  zdefiniowanych jako  $(C_\alpha f)(z) := \bar{z}\alpha(z)\overline{f(z)}$ ,  $z \in \mathbb{T}$ , i analogicznie dla  $C_\theta$ . Jest to często wygodne w zastosowaniach. Otrzymane wyniki są pożytecznymi uogólnieniami klasycznych reprezentacji Sarasona w przypadku  $\alpha = \theta$ . Istotne jest to, że jak pokazuje Habilitantka, w pewnych sytuacjach operatory rangi 2 można zastąpić przez operatory rangi 1. Reprezentacje typu Sarasona mogą być też użyte do wyznaczenia (jednego z) symboli dla danych operatorów Toeplitza  $A$ , które na ogół są określone niejednoznacznie, i stają się jednoznacznie określone przy dodatkowych założeniach. Np. powyższa charakteryzacja prowadzi do reprezentacji  $A = A_{\psi+\bar{\chi}}^{\theta,\alpha}$ . Odzyskanie symboli dla innych reprezentacji  $A - S_\alpha A S_\theta^*$  otrzymanych w tej pracy jest bardziej wymagające technicznie, i realizuje się przez badanie działań  $A$  i  $A^*$  na jądrach reprodukujących. Praca jest istotnym krokiem w rozwoju teorii obciętych operatorów Toeplitza.

Duża część osiągnięcia naukowego, zawierająca się w pracach [O2], [O5] i [O6], koncentruje się wokół badań asymetrycznych dualnych obciętych operatorów Toeplitza  $D_\varphi^{\alpha,\theta}$ . Własności operatorów z tej klasy istotnie się różnią od własności asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza, m.in. symbol  $D_\varphi^{\alpha,\theta}$  jest wyznaczony jednoznacznie. W szczególności, w [O2] otrzymano twierdzenie pozwalające na odzyskanie symbolu (symetrycznego) dualnego obciętego operatora Toeplitza  $D_\varphi^\theta$  w dość skomplikowanych geometrycznych terminach. Ale w przypadku  $\varphi \in L^\infty$  twierdzenie to przyjmuje przejrzystą postać i daje elegancki wzór na  $\varphi$ . Ponadto, w [O2] uzyskano transparentną charakteryzację przemienności operatorów  $D_\varphi^\theta$  i  $D_z^\theta$  oraz obciętych operatorów Hankela rangi 1, powstających naturalnie w tym kontekście.

Praca [O5] jest rozwinięciem podejścia i wyników z [O2]. Opis komutantów rodzin operatorowych oraz operatorów splatających dwie ustalone rodziny operatorów (w tym poszczególne operatory) jest klasycznym zagadnieniem analizy funkcjonalnej. W [O5] znaleziony został opis operatorów splatających obcięte operatory Toeplitza  $A_z^\theta$  i  $A_z^\alpha$ , działające na przestrzeniach modelowych  $K_\theta$  i  $K_\alpha$ , oraz splatających dualne obcięte operatory Toeplitza  $D_z^\theta$  and  $D_z^\alpha$  zdefiniowane na odpowiednich dopełnieniach ortogonalnych  $K_\theta^\perp$  i  $K_\alpha^\perp$  przestrzeni modelowych w  $L^2$ . Twierdzenia te implikują przejrzysty opis komutantów  $\{A_z^\theta\}'$  i  $\{D_z^\theta\}'$ . Między innymi, opis  $\{A_z^\theta\}'$  dostarcza wzmocnienia podobnego twierdzenia Bercovici uzyskane znacznie prostszymi metodami. Charakteryzacja  $\{D_z^\theta\}'$  uogólnia rezultaty udowodnione w przypadku symetrycznym  $\theta = \alpha$  przez innych autorów, jednocześnie z [O5]. W pracy, ponadto, scharakteryzowano asymetryczne dualne obcięte operatory Toeplitza splatające  $D_z^\alpha$  i  $D_z^\theta$ . Otrzymane wyniki są w pewnym sensie wyczerpujące i na pewno pomogą w zrozumieniu i dalszych badaniach własności algebraicznych obciętych operatorów Toeplitza i analogicznych operatorów dualnych. (Dualność jest tu rozumiana w sensie powyższej definicji  $D_\varphi^{\alpha,\theta}$ .)

Cały szereg nowych własności asymetrycznych dualnych obciętych operatorów Toeplitza  $A_\varphi^{\alpha,\theta}$  został znaleziony w pracy [O6], ściśle związanej z artykułem [O5]. Wiele wyników w tej pracy jest nowych nawet w przypadku symetrycznym  $\alpha = \theta$ . Istotna część z nich opiera się na następującym ujęciu niezmienniczości względem przesunięcia, należącym w przypadku symetrycznym do Sarasona. Ustalając podprzestrzenie  $H_1, H_2 \subset L^2$ , powiemy, że

ograniczony operator  $A : H_1 \rightarrow H_2$  jest niezmienniczy względem przesunięcia jeśli dla wszystkich  $f \in H_1$  i  $g \in H_2$  spełniających odpowiednio  $zf \in H_1$  i  $zg \in H_2$  zachodzi  $\langle A(zf), zg \rangle = \langle Af, g \rangle$ . W pracy pokazano, że asymetryczne dualne obcięte operatory Toeplitza są niezmiennicze na przesunięcia. Zauważmy, że w przeciwieństwie do asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza, które można scharakteryzować przez niezmienniczość względem przesunięć, zbiór  $\mathcal{T}$  wszystkich operatorów niezmienniczych na przesunięcia między  $K_\alpha^\perp$  i  $K_\theta^\perp$  jest szerszy niż zbiór asymetrycznych dualnych obciętych operatorów Toeplitza między tymi przestrzeniami. Habilitantka udowodniła, że  $\mathcal{T}$  pokrywa się z klasą operatorów należących do kommutantu  $\{D_z\}'$ , opisanego w [O5]. Ponadto, w pracy [O6] została uzyskana charakteryzacja asymetrycznych dualnych obciętych operatorów Toeplitza rozszerzając analogiczną charakteryzację udowodnioną w [O2] dla przypadku symetrycznego.

Ta charakteryzacja oraz niezmienniczość względem przesunięć prowadzą do ciekawych strukturalnych wyników o przestrzeniach operatorów Toeplitza związanych z pojęciem refleksywności. Ponieważ podobne wyniki będą omawiane też później, przytoczę pewne intuicje pomocnicze. W latach 60-ch Sarason wprowadził definicję refleksywności dla algebr operatorowych. Mówiąc ogólnie, refleksywna algebra posiada tak bogaty zbiór podprzestrzeni niezmienniczych, że determinuje on samą algebrę. Z drugiej strony, będąc w pewnym sensie zaprzeczeniem refleksywności, tranzytywność algebry oznacza brak wspólnych, nietrywialnych podprzestrzeni niezmienniczych. Używając języka preanihilatorów, definicje te uogólniają się na przypadek (słabo\* domkniętych) podprzestrzeni operatorów. W tym ujęciu, refleksywność jest równoważna istnieniu zbioru operatorów rzędu 1 w preanihilatorze podprzestrzeni generującego cały preanihilator, a tranzytywność jest równoważna z brakiem operatorów rzędu jeden w preanihilatorze. Pomiedzy tymi pojęciami znajduje się 2-refleksywność, która oznacza gęstość operatorów rzędu najwyżej 2 w preanihilatorze. Opierając się na nowym podejściu, w pracy [O6] pokazano, że przestrzeń wszystkich (asymetrycznych) obciętych operatorów Toeplitza jest słabo\* domknięta, 2-refleksywna oraz tranzytywna. Okazuje się, że przestrzeń asymetrycznych dualnych obciętych operatorów Toeplitza jest też słabo\* domknięta i 2-refleksywna, (mimo że jej własności znacząco odbiegają od własności obciętych operatorów Toeplitza). Co więcej, w pracy udowodnione są słaba\* domkniętość i 2-refleksywność każdej podprzestrzeni przestrzeni asymetrycznych dualnych obciętych operatorów Toeplitza.

Badania obciętych operatorów Toeplitza i operatorów Hankela, motywują dokładne spojrzenie na własności i strukturę sprzężeń na  $L^2$ . Szczególną rolę odgrywają tu sprzężenia  $J$  (lub  $J^*$ ) i  $J^\#$  zdefiniowane jako  $(Jf)(z) := \overline{f(z)}$  i  $(J^\#f)(z) := \overline{f(\bar{z})}$ , oraz operatory mnożenia  $M_z$  i  $M_{\bar{z}}$  na  $L^2$ . Fakt, że  $M_z J = J M_{\bar{z}}$  oraz  $J H^2 = \overline{H^2}$ , a  $J^\#$  jest przemienny z  $M_z$  i zachowuje  $H^2$  jest bardzo pomocny w badaniu sprzężeń na  $L^2$ , co dobrze ilustrują prace [O7, O4]. W pracy [O7] zostały opisane wszystkie sprzężenia  $C$  na  $L^2$  względem, których operator  $M_z$  jest  $C$ -symetryczny. Uzupełniając ten wynik, dr. Kliš-Garlicka w artykule [O4] charakteryzuje wszystkie sprzężenia przemiennie z  $M_z$ . Te wyniki pozwalają udowodnić, między innymi, brak sprzężeń  $C$  zachowujących  $H^2$ , względem których operator  $M_z$  jest  $C$ -symetryczny. Ponadto,

okazuje się, że  $J^\#$  jest jedynym (z dokładnością do mnożenia przez stałą) sprzężeniem przemiennym z  $M_z$  i zachowującym  $H^2$ . Jednym z głównych rezultatów pracy, jest charakteryzacja sprzężeń  $C$  takich, że operator  $M_z$  jest  $C$ -symetryczny oraz zachowuje przestrzenie modelowe:  $C(K_\alpha) \subset K_\theta$ . Jest to istotne wzmocnienie wcześniejszego wyniku z [O7], gdzie dodatkowo zakładało się, że  $\alpha$  dzieli  $\theta$ . Ponadto, zostały scharakteryzowane sprzężenia przemiennie z  $M_z$  i zachowujące podprzestrzenie modelowe oraz podprzestrzenie niezmiennicze względem przesunięcia na  $H^2$ , tzn. podprzestrzenie postaci  $\theta H^2$ , gdzie  $\theta$  jest funkcją wewnętrzną.

Obszerne badania struktury sprzężeń na  $L^2$  są realizowane w [O3]. Prowadzą one do opisu sprzężeń przemiennych z operatorami postaci  $A_z^\theta$  oraz sprzężeń, względem których  $A_z^\theta$  jest zespolonym operatorem symetrycznym. Mimo, że rozumowania w [O3] są naturalne i dość proste, jestem pewien, że praca będzie aktywnie wykorzystywana w dalszych badaniach operatorów  $C$ -symetrycznych, w szczególności obciętych operatorów Toeplitza. Część wyników uzyskanych w [O3], Habilitantka wkłada w artykule [O4] w bardziej ogólny i wymagający kontekst przestrzeni wektorowych  $L^2(\mathbb{T}, \mathbf{H})$ , gdzie  $\mathbf{H}$  jest ośrodkową przestrzenią Hilberta. Definicje sprzężeń  $J$  i  $J^\#$  oraz operatorów  $M_z$  i  $M_{\bar{z}}$  w sposób naturalny adaptują się do przypadku wektorowego. W [O4] otrzymano wersje wektorowe rezultatów z [O7] i [O4], charakteryzujące wszystkie sprzężenia  $C$  realizujące  $C$ -symetrię operatora  $M_z$  na  $L^2(\mathbf{H})$  oraz wszystkie sprzężenia przemiennie z  $M_z$ . Ponadto opisano wszystkie  $M_z$ -przemienne sprzężenia, które na dodatek zachowują przestrzeń  $H^2(\mathbb{T}, \mathbf{H})$ . Dla  $\mathbf{H}$  o skończonym wymiarze scharakteryzowano wszystkie  $M_z$ -przemienne sprzężenia lub sprzężenia splatające  $M_z$  z  $M_{\bar{z}}$ , które odwzorowują jedną przestrzeń modelową w drugą (przy technicznym założeniu czystości odpowiednich funkcji wewnętrznych). Argumenty w porównaniu do [O3] wymagają zaawansowanej adaptacji, w tym na poziomie pojęciowym, i istotnie zależą od własności wersji wektorowych twierdzeń i obiektów używanych w [O3] (np. operatorowych funkcji wewnętrznych).

W artykule [O8], stojącym nieco obok głównego nurtu rozprawy, dr Kliś-Garlicka bada następujący problem uzupełnienia. Zakładając, że przestrzeń Hilberta  $H$  ma rozkład ortogonalny  $H = H_1 \oplus H_2$ ,  $C$  jest sprzężeniem na  $H$ , oraz operator  $A$  jest ograniczony z  $H_1$  do  $H_1$ , Habilitantka bada możliwość ograniczonego rozszerzenia  $A$  na całe  $H$  tak, aby rozszerzenie to było  $C$ -symetryczne. W sposób naturalny powstają tu zagadnienia opisu wszystkich takich rozszerzeń oraz znalezienia warunków koniecznych (niezmienników). Tematyka uzupełnień jest szeroko umocowana w zastosowaniach, np. w teorii przetwarzania obrazów bądź mechanice kwantowej, a zatem jest ważną i wymagającą. Przygotowując grunt do takich badań, dr Kliś-Garlicka charakteryzuje wszystkie zespolone symetryczne operatory Toeplitza. Warunki na  $C$ -symetryczne uzupełnienia uzyskane są dla asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza, blokowych operatorów Toeplitza na  $H^2 \oplus H^2$ , oraz operatorów Toeplitza o symbolu macierzowym. W niektórych przypadkach otrzymane warunki są optymalne. Ponadto pewne naturalne klasy zespolonych symetrycznych uzupełnień zbadane są dla abstrakcyjnych operatorów Wienera-Hopfa. Wyniki te są ciekawe i znalezienie ich optymalnej postaci byłoby, moim zdaniem, dobrym problemem naukowym w przyszłości.

### **Pozostałe osiągnięcia naukowe dr Kliś-Garlickiej.**

Pozostałe osiągnięcia naukowe omówię krótko, aby nie przedłużać tej i tak długiej recenzji. Warto podkreślić fakt, że dorobek Habilitantki obok osiągnięcia naukowego jest poważny, a niektóre rezultaty mają duży ciężar gatunkowy.

Istotną część pozostałych osiągnięć dotyczy też tematyki operatorów Toeplitza, a kilka artykułów jest ściśle związanych z tematyką osiągnięcia naukowego. Wypada tu wyróżnić pomysłową pracę [P3], gdzie Habilitantka wspólnie z Câmara, Łanuchą i Ptakiem dogłębnie zbadała cienkie własności spektralne dualnych obciętych operatorów Toeplitza. Techniki [P3] opierają się na badaniu równoważnych operatorów po rozszerzeniu, pojęciu operatorów sparowanych oraz wersji Twierdzenia o koronie, i są w tym kontekście autentycznie nowe. Oprócz własności spektralnych, została wyjaśniona struktura jąder dualnych obciętych operatorów Toeplitza, będąca istotną w teorii operatorów Toeplitza. Ponadto, pokazano jak obcięte operatory Toeplitza związane są w sensie równoważności po rozszerzeniu z ich dualnymi analogonami, co jest ciekawym wynikiem. Zauważę, że praca [P3] została uhonorowana nagrodą za najlepszy artykuł opublikowany w roku 2020 w Banach Journal of Mathematical Analysis. Operatory Toeplitza oraz ich obcięte wersje były też badane w [P4], [P7], [P9] oraz [P11].

Osobnym tematem w badaniach dr Kliś-Garlickiej poza osiągnięciem naukowym jest własność refleksywności podprzestrzeni operatorowych, krat podprzestrzeni, oraz szereg pokrewnych własności. Na szczególną uwagę zasługują wyniki z prac [P12] i [P2] dotyczące badania własności refleksywności krat podprzestrzeni oraz podprzestrzeni operatorowych. (Przypomnijmy, że temat refleksywności już był krótko omówiony wyżej.) Uogólniając własność refleksywności kraty podprzestrzeni (lub odpowiednich rzutów), pojęcie operatorowej refleksywności takiej kraty zostało wprowadzone przez Shul'mana i Todorova. Mimo, że nowe pojęcie okazało się dość pożyteczne, nie było jasne, czy każda krata podprzestrzeni jest hyperrefleksywna. Pomysłowy przykład kraty która nie jest operatorowo hyperrefleksywna został skonstruowany przez Habilitantkę w pracy [P12]. (Istotnie, przykład posiada mocniejszą własność: jest to silnie domknięta krata, której otoczka operatorowa-refleksywna pokrywa się z kratą wszystkich podprzestrzeni). Z kolei, rozwijając teorię operatorowej refleksywności, w artykule [P2] zostało wprowadzone i zbadane nowe pojęcie operatorowej hyperrefleksywności. Operatorowa hyperrefleksywność jest mocniejsza od jej refleksywnego analogonu, ale może nie implikować zwykłej refleksywności. Jako przykładowe wyniki, wspomnijmy, że w [P2] udowodniono, że każda skończona krata podprzestrzeni jest hyperrefleksywna, podkraty kraty operatorów hyperrefleksywnej posiadają też tę własność, oraz hyperrefleksywność jest niezmiennicza względem sum prostych. Badania refleksywności i pokrewnych własności znajdują się też w pracach [P1], [P6], [P7], [P8]-[P10], oraz [P13]. Wśród nich wyróżnia się praca [P6], gdzie charakteryzacje i własności słabo \* domkniętych podprzestrzeni refleksywnych w sposób naturalny uogólnia się na podprzestrzenie  $k$ -refleksywne.

Moim zdaniem, z wyników Habilitantki o refleksywności można byłoby ułożyć osobne osiągnięcie naukowe, które będąc dość odległym od tematyki, ocenianej w tej recenzji, miałyby nieprzeciętną wartość merytoryczną.

**Uwagi ogólne:** Oceniane osiągnięcie naukowe zawiera szereg wartościowych wyników, skupiających się wokół badania własności algebraicznych obciętych operatorów Toeplitza i związanych z nimi operatorów sprzężenia. Jest to aktualny temat, rozwój którego przyczyni się do postępów w kilku działach analizy funkcjonalnej i analizy zespolonej. Moim zdaniem, na wyróżnienie zasługują artykuły [O1], [O3], [O4] i [O6]. zawierające ciekawe wyniki. Habilitantka stosuje zaawansowane techniki analizy funkcjonalnej i dość swobodnie porusza się między jej dość odległymi zagadnieniami.

Z drugiej strony, oceniane osiągnięcie jest dość hermetyczne, nieco brakuje różnorodności metod i tematów wokół badanych zagadnień, np. związanych z zaawansowaną teorią funkcji czy teorią przestrzeni Hardy'ego. Argumenty używane w różnych pracach z cyklu [O1-O8] są dość podobne i raczej nie wymagają istotnie nowych pomysłów, choć na pewno są niebanalne. Z tego punktu widzenia wartość osiągnięcia by wzrosła po umieszczeniu w nim np. pracy [P3]. Artykuły opublikowane są w przyzwoitych czasopismach średniej rangi. Ale nie jest to istotnym mankamentem. Uważam, że co najmniej kilka prac mogłoby trafić do bardzo dobrych pism.

Autoreferat jest napisany dość starannie. Badania nie są jednak włożone w szerszy kontekst, a tekst jest przeciążony technicznymi sformułowaniami, które są często obarczone skąpymi komentarzami. Wypadałoby uwypuklić liczne motywacje do badania operatorów Toeplitza oraz operatorów sprzężenia zespolonego, oraz przynajmniej zdawkowo omówić szereg prac związanych z omawianym osiągnięciem, np. C. Gu, B. Łanucha, M. Michalska, Characterizations of asymmetric truncated Toeplitz and Hankel operators, *Complex Anal. Oper. Theory* 13 (2019), 673-684; C. Gu, Characterizations of dual truncated Toeplitz operators, *J. Math. Anal. Appl.* 496 (2021), no. 124815, 24 pp., J. Jurasik, B. Łanucha, Asymmetric truncated Toeplitz operators equal to the zero operator, *Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A*, 70 (2016), 51-62, ale takich prac jest więcej. Habilitantka nie ustrzegła się szeregu literówek, ale mają one charakter marginalny.

Choć wszystkie prace napisane są we współautorstwie (większości z Cămară, Łanuchą i Ptakiem), udział dr Kliś-Garlickiej w ich powstawaniu jest niewątpliwie istotny, a czasami decydujący. Dorobek obok osiągnięcia naukowego ilustruje szeroki zakres współpracy dr Kliś-Garlickiej z innymi matematykami.

Wart podkreślenia jest fakt, że dorobek obok habilitacji jest poważny, a niektóre rezultaty mają duży ciężar gatunkowy. Na szczególną uwagę zasługują wyniki z prac dotyczących refleksywności, krótko omówione wyżej. (Jak już wspominałem, pewne artykuły z tego dorobku mogłyby być włączone do osiągnięcia naukowego, wzmacniając jego wartość naukową).

Habilitantka współorganizowała osiem konferencji międzynarodowych i odbyła szereg wizyt naukowych. Spędziła też rok akademicki 2015 – 2016 w IM PAN na czasowym stanowisku badawczym. Ponadto, uczestniczyła ona w realizacji dwóch grantów naukowych. Więc aktywność zawodowa Habilitantki jest na przyzwoitym poziomie.

Reasumując, przedstawione osiągnięcie naukowe wygląda solidnie i rozwija aktualny kierunek badań, wymagający zaawansowanego warsztatu oraz głębokiego zrozumienia teorii operatorów Toeplitza i związanej z nią struktury przestrzeni Hardy'ego, m.in. przestrzeni modelowych. Wskazane powyższe braki nie mają istotnego wpływu na moją ocenę ogólną osiągnięcia.

**Konkluzja:** Uważam, że wyniki uzyskane w osiągnięciu naukowym stanowią znaczący wkład w rozwój teorii operatorów. Nie mam wątpliwości, że dr Kamila Kliś-Garlicka spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe do nadania stopnia doktora habilitowanego zapisane w artykule 219 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce z dnia 20 lipca 2018 roku. Popieram wniosek o nadanie dr. Kamile Kliś-Garlickiej stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, dyscyplinie matematyka.

Yuriy Tomilov/