Autoreferat

Konrad Pióro

Dyplomy i stopnie naukowe:

(1) Dyplom magistra matematyki, specjalność: matematyka teoretyczna, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytetu Warszawskiego, 23.06.1992.

(2) Stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytetu Warszawskiego, 19.12.1996.

Tytuł rozprawy doktorskiej: *Jednoznaczność charakteryzacji grafu unarnej algebry częściowej przez kratę jej słabych podalgebr*.

Zatrudnienie:

(1) 1992 – 2001 asystent w Instytucie Matematyki, Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytetu Warszawskiego.

(2) od 2001 adiunkt w Instytucie Matematyki, Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytetu Warszawskiego.

Jako najważniejsze osiągnięcie, wskazuję cykl publikacji pod tytułem:

Hipergrafowe podejście do krat podalgebr algebry częściowej.

Na niniejszy cykl składają się następujące prace:

(P1) K. Pióro *On Connections Between Hypergraphs and Algebras*, Archivum Mathematicum 36 (2000), 45-60.

(P2) K. Pióro *Some Properties of the Weak Subalgebra Lattice of a Partial Algebra of a Fixed Type*, Archivum Mathematicum 38 (2002), 81-94.

(P3) K. Pióro *On the Subalgebra Lattice of Unary Algebras*, Acta Math. Hungar. 84 (1-2) (1999), 27-45.

(P4) K. Pióro, *On some unary algebras and their subalgebra lattices* Math. Slovaca 56, 255-273, 2006.

(P5) K. Pióro *A Property of the Weak Subalgebra Lattice for Algebras with Some Non-Equalities* KYUNGPOOK Math. J. 50 (2010), 195-211.

(P6) K. Pióro *An Example of a Quasigroup with a Distributive Subquasigroup Lattice*, Results in Mathematics 58 (2010), 55-67.

(P7) K. Pióro *Hypergraphs Induced by Algebras of Fixed Type*, Discrete Mathematics 311 (2011) 1735-1753.

1 Wstęp

Ważną częścią algebry uniwersalnej jest badanie związków pomiędzy algebrami i rozmaitościami algebr a ich kratami podalgebr. Na przykład, J. Shapiro pokazał w pracy [*Finite Equational Bases for Subalgebra Distributive Varieties*, Alg. Univ. 24 (1987), 36-40], że rozmaitość algebr, w której każda algebra ma rozdzielną kratę podalgebr (tzw. rozmaitość podalgebrowo rodzielna), ma skończoną bazę równościową. Inną grupą ważnych problemów w algebrze uniwersalnej jest reprezentacja krat poprzez kraty podalgebr algebr danego typu, czy z danej rozmaitości. Część tych problemów jest ciągle nierozwiązanych (patrz np. [*Topics in Universal Algebra*, B. Jónsson (LNM 250), Springer 1972]).

Oczywiście krata podalgebr jest również w miarę ważnym pojęciem w klasycznej algebrze. Dla przykładu, pewien rodzaj wymiaru modułów jest definiowany poprzez kratowy wymiar ich krat podmodułów, które są modularnymi kratami (patrz np. [*General Lattice Theory*, G. Grätzer, Birkhäuser Verlag, 1998]). Przypomnijmy również, że pewna część teorii grup bada kraty podrup oraz związki pomiedzy grupami i ich kratami podgrup (patrz [*Subgroup lattices of Groups*, R. Schmidt, Walter de Gruyter 1994]).

W teorii algebr częściowych dobrze znane pojęcie podalgebry rozbija się na kilka zupełnie różnych pojęć. Oczywiście klasyczne pojęcie podalgebry przenosi się bez zmian na przypadek częściowy (będziemy je tutaj nazywać silnymi, żeby odróżnić je od innych rodzajów częściowych podalgebr). Z drugiej strony, mamy słabe podalgebry, które wydają się bardzo silnym narzędziem do badania algebr, również totalnych. Rozpatruje się jeszcze kilka innych rodzajów częściowych podalgebr, np. relatywne i odcinki początkowe (definicje można znaleźć np. w (P1)). Jednak prace (P1)–(P7) badają głównie kraty słabych i silnych podalgebr oraz wpływu kraty słabych poalgebr na kratę silnych podalgebr.

Mówiąc w dużym skrócie (dokładniejsze omówienie wyników jest podane w następnych paragrafach), prace (P1) i (P2) wprowadzają związki pomiędzy algebrami częściowymi i hypergrafami (zorientowanymi i niezorientowanymi), które są bardzo pomocne w badaniu krat podalgebr.

W pracy (P3) stosuję ten hipergrafowy język do unarnych częściowych algebr (w tym przypadku mamy do czynienia z grafami i digrafami) i dowodzę że dwie algebry unarne mają izomorficzne kraty silnych podalgebr wtedy i tylko wtedy gdy pewne specjalne acykliczne digrafy odpowiadające tym algebrom mają izomorficzne porządki. W podobny sposób możemy sprawdzić czy krata silnych podalgebr danej unarnej algebry jest izomorficzna z daną kratą. W pracy (P4) badam pewną klasę unarnych algebr, których kraty silnych podalgebr spełniają pewnien warunek skończoności. W tym przypadku powyższe dwa rezultaty przyjmują prostszą postać (izomorfizm krat odpowiada izomorfizmom pewnych digrafów). Następnie (i to jest główny cel tej pracy), korzystając z tych rezultatów znajduję warunki konieczne i dostateczne na pary krat, które są izomorficzne z kratami słabych i silnych podalgebr jednej unarnej algebry.

Praca (P5) pokazuje, że krata słabych podalgebr jest rzeczywiście silnym narzędziem do badania algebr, ponieważ dla lokalnie skończonej (totalnej) algebry skończonego typu, jej krata słabych podalgebr wyznacza jednoznacznie kratę silnych podalgebr. Niestety przy pewnym dodatkowym założeniu o hipergrafie tej algebry. Założenie to jest bardzo naturalne dla hipergrafów, ale tłumaczy się na język algebry jako niespełnianie pewnych równości.

Praca (P6) zawiera konstrukcję (totalnej) quasigrupy, która ma rozdzielną kratę podquasigrup, jest generowana przez dwa elementy i nie ma jednego generatora. To pokazuje, że w przypadku quasigrup, rozdzielność kraty podalgebr jest znacznie słabszym warunkiem niż dla grup. Przypomnijmy klasyczny rezultat udowodniony przez O. Ore'go (patrz np. [*Subgroup lattices of Groups*, R. Schmidt, Walter de Gruyter, 1994]), że grupa ma rozdzielną kratę podgrup wtedy i tylko wtedy gdy jest lokalnie cykliczna. Praca (P6) bezpośrednio nie używa hipergrafowego języka z prac (P1) i (P2), natomiast cała konstrukcji jest oparta na spojrzeniu na quasigrupę jak na zorientowany hipergraf, którego krawędzie (pochodzące od jej trzech binarnych operacji) spełniają pewne warunki, które pochodzą od równości quasigrupy.

Praca (P7) zawiera charakteryzację kraty słabych podalgebr częściowej algebry danego typu. Dokładniej, charakteryzajca kraty słabych podalgebr została podana przez W. Bartola w pracy [*Weak Subalgebra Lattices*, Comment. Math. Univ. Carolinae 31 (1990), 405-410]. Niestety, ta charakteryzacja i jej dowód nie dają żadnych informacji o typie algebry, a jest to bardzo naturalne pytanie. Tak postawiony problem jest naprawdę trudny. Mając hipergrafowy język wystarczy scharakteryzować hypergrafy które mogą być reprezentowane przez częściowe algebry danego typu. W ten sposób otrzymam również daleko idące uogólnienie rezultatu opisującego kiedy krawędzie niezorientowanego grafu mogą zostać zorientowane w ten sposób, że otrzymamy funkcyjny digraf (lub równoważnie monounarną algebrę). Przypomnijmy, że ten ostatni rezultat należy także do O. Ore'go (patrz np. [*Graphs and Hypergraphs*, C. Berge, North-Holland, 1973).

2 Omówienie otrzymanych wyników

2.1 Związki pomiędzy algebrami i hipergrafami

W pracach (P1) i (P2)[1] pokazuję związki pomiędzy algebrami częściowymi i hipergrafami (niezorietowanymi i zorientowanymi). Niektóre z nich są bar-

[1]Na stronie 82 są dwa błędy drukarskie:
linie 1 i 2: jest *Proposition 3.19*, powinno być *Proposition 3.21*.
linia 5: jest $(\kappa^{-1}(0), \kappa^{-1}(1), \kappa^{-1}(2), \ldots)$, powinno być $(|\kappa^{-1}(0)|, |\kappa^{-1}(1)|, |\kappa^{-1}(2)|, \ldots)$

dzo proste, ale również bardzo przydatne w badaniu krat różnego rodzaju częściowych podalgebr. Przypominam je w miarę dokładnie, ponieważ stanowią one podstawę do dalszych badań w pracach (P3)–(P7).

Żeby uniknąć jakichkolwiek wątpliwości w oznaczeniach przypomnijmy na początku, że typem algebry (totalnej lub częściowej) nazywamy parę $\langle K, \kappa\rangle$, gdzie K jest zbiorem symboli operacyjnych, a $\kappa\colon K \longrightarrow \mathbb{N}$ jest funkcją arności z K w zbiór liczb całkowitych nieujemnych $\mathbb{N}$.

Algebrą częściową typu $\langle K, \kappa\rangle$ nazywamy parę $\mathbf{A} = \langle A, (k^{\mathbf{A}})_{k\in K}\rangle$, gdzie A jest zbiorem elementów algebry, oraz dla każdego $k \in K$, $k^{\mathbf{A}}$ jest częściową funkcją z $A^{\kappa(k)}$ w A (tzn. funkcją określoną na pewnym podzbiorze zbioru $A^{\kappa(k)}$). Biorąc totalne opercje zamiast częściowych otrzymujemy defincję (totalnej) algebry.

Klasyczne (totalne) podalgebry definiujemy w częściowym przypadku dokładnie tak samo jak dla totalnych algebr. Te podalgebry będziemy nazywać silnymi, żeby je odróżnić od innych rodzajów częściowych podalgebr. Wszyskie własności takich podalgebr przenoszą się bez zmian na przypadek częściowy. W szczególności, zbiór wszystkich silnych podalgebr $S_s(\mathbf{A})$ algebry $\mathbf{A}$, razem z inkluzją, tworzy kratę algebraiczną $\mathbf{S}_s(\mathbf{A}) = \langle S_s(\mathbf{A}), \leqslant_s\rangle$.

Drugim typem częściowych podalgebr są słabe podalgebry (patrz np. [*Lectures on Algebras, Equations and Partiality*, eds W. Bartol, F. Rosselló, L. Rudak, Tech. report B-006, Univ. Illes Balears, Dept. Ciencies Mat. Inf., 1992]). Przypomnijmy, że częściowa algebra $\mathbf{B} = \langle B, (k^{\mathbf{B}})_{k\in K}\rangle$ tego samego typu $\langle K, \kappa\rangle$ jest słabą podalgebrą algebry częściowej $\mathbf{A}$, jeśli $B \subseteq A$ i $k^{\mathbf{B}} \subseteq k^{\mathbf{A}}$ dla każdego $k \in K$. Zbiór wszystkich słabych podalgebr $S_w(\mathbf{A})$ częściowej algebry $\mathbf{A}$, razem z inkluzją, tworzy kratę algebraiczną $\mathbf{S}_w(\mathbf{A}) = \langle S_w(\mathbf{A}), \leqslant_w\rangle$.

Pełna charakteryzacja kraty słabych podalgebr wygląda następująco (patrz [*Weak Subalgebra Lattices*, W. Bartol, Comment. Math. Univ. Carolinae 31 (1990), 405-410]):

Krata $\mathbf{L} = \langle L, \leqslant_{\mathbf{L}}\rangle$ jest izomorficzna z kratą słabych podalgebr $\mathbf{S}_w(\mathbf{A})$ algebry częściowej $\mathbf{A}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{L}$ spełnia następujące warunki:

(W.1) $\mathbf{L}$ jest algebraiczna i rozdzielna,

(W.2) każdy element $\mathbf{L}$ jest kresem górnym $\vee-$nieredukowalnych elementów,

(W.3) dla każdego niezerowego i nieatomowego $\vee-$nieredukowalnego elementu i, zbiór wszystkich atomów zawartych w i jest skończony i niepusty,

(W.4) zbiór wszystkich niezerowych i nieatomowych $\vee-$nieredukowalnych elementów $\mathbf{L}$ jest antyłańcuchem.

Element i kraty $\mathbf{L}$ jest $\vee-$nieredukowalny, jeśli równość $i = a \vee b$ implikuje, że $i = a$ lub $i = b$.

W pracach (P1) i (P2) rozpatruję również dwa inne rodzaje częściowych podalgebr, mianowicie, relatywne podalgebry i odcinki początkowe. Nie będziemy tu jednak przypominać ich defincji, ponieważ te dwa rodzaje podalgebr nie grają tak ważnej roli w dalszej części mojej rozprawy jak słabe i silne podalgebry. Te podalgebry też tworzą kraty algebraiczne $\mathbf{S}_r(\mathbf{A})$ i $\mathbf{S}_i(\mathbf{A})$, odpowiednio.

Ponieważ będę reprezentować algebry przy pomocy hipergrafów, zbiory wierzchołków i krawędzi mogą mieć dowolną moc, oraz wielokrotne krawędzie i izolowane wierzchołki mogą występować w hipergrafie. Dlatego użyję trochę bardziej formalnej definicji niż zwykle (patrz np. [*Hypergraphs. Combinatorics of Finite Sets*, Berge C., North-Holland, Amsterdam, 1989]).

Hipergraf (niezorientowany) jest trójką $\mathcal{H} = \langle V^{\mathcal{H}}, E^{\mathcal{H}}, I^{\mathcal{H}} \rangle$, gdzie $V^{\mathcal{H}}$ jest zbiorem wierzchołków $\mathcal{H}$, $E^{\mathcal{H}}$ jest zbiorem krawędzi $\mathcal{H}$ i $I^{\mathcal{H}}$ jest funkcją ze zbioru $E^{\mathcal{H}}$ w zbiór wszystkich skończonych i niepustych podzbiorów zbioru $V^{\mathcal{H}}$. Oczywiście $I^{\mathcal{H}}(e)$ jest zbiorem końców krawędzi e.

Ponieważ podhipergrafy służą do reprezentowania słabych podalgebr, potrzebuję również trochę bardziej ogólnej definicji podhipergrafów niż zwykle (patrz ta sama książka).

Hipergraf $\mathcal{K} = \langle V^{\mathcal{K}}, E^{\mathcal{K}}, I^{\mathcal{K}} \rangle$ jest słabym podhipergrafem hipergrafu $\mathcal{H} = \langle V^{\mathcal{H}}, E^{\mathcal{H}}, I^{\mathcal{H}} \rangle$, jeśli $V^{\mathcal{K}} \subseteq V^{\mathcal{H}}$, $E^{\mathcal{K}} \subseteq E^{\mathcal{H}}$ i $I^{\mathcal{K}} \subseteq I^{\mathcal{H}}$.

Podobnie jak dla algebr, można pokazać, że zbiór wszystkich słabych podhipergrafów hipergrafu $\mathcal{H}$ tworzy kratę algebraiczną $\mathbf{S}_w(\mathcal{H}) = \langle S_w(\mathcal{H}), \leqslant_w \rangle$.

W (P1) definiuję również relatywne podhipergrafy hypergrafu $\mathcal{H}$, ich rodzina również tworzy kratę algebraiczną $\mathbf{S}_r(\mathcal{H})$.

Potrzebuję również pojęcia dihipergrafu (czyli zorientowanego hipergrafu), jest to proste uogólnienie digrafów.

Dihipergraf jest trójką $\mathcal{D} = \langle V^{\mathcal{D}}, E^{\mathcal{D}}, I^{\mathcal{D}} \rangle$, gdzie $V^{\mathcal{D}}$ jest zbiorem wierzchołków $\mathcal{D}$, $E^{\mathcal{D}}$ jest zbiorem (zorientowanych) krawędzi $\mathcal{D}$ i $I^{\mathcal{D}} = \langle I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}} \rangle$ jest parą funkcji taką, że $I_1^{\mathcal{D}}$ jest funkcją z $E^{\mathcal{D}}$ w zbiór wszystkich skończonych podzbiorów (razem ze zbiorem pustym) zbioru $V^{\mathcal{D}}$ oraz $I_2^{\mathcal{D}}$ jest funkcją z $E^{\mathcal{D}}$ w $V^{\mathcal{D}}$.

Dla dowolnej krawędzi e, $I_1^{\mathcal{D}}(e)$ jest zbiorem początkowym e, a $I_2^{\mathcal{D}}(e)$ jest wierzchołkiem końcowym e.

Krawędź e nazywamy $k-$krawędzią, jeśli jej zbiór początkowy ma k wierzchołków (tzn. $|I_1^{\mathcal{D}}(e)| = k$). Krawędź e jest pętlą, jeśli $I_2^{\mathcal{D}}(e) \in I_1^{\mathcal{D}}(e)$. W przeciwnym razie mówimy, że e jest regularna.

Ta definicja dopuszcza krawędzie z pustym zbiorem początkowym (tzn. $0-$krawędzie), które można (podobnie jak dla algebr) utożsamić z ich końcowymi wierzchołkami i dlatego nazywam je także stałymi. $0-$krawędzie reprezentują stałe algebry.

Słabe poddihipergrafy dihipergrafu $\mathcal{D}$ definiuję podobnie jak w przypadku hipergrafów. Co więcej, ten rodzaj poddihipergrafów jest także używany do reprezentowania słabych podalgebr.

Zbiór wszystkich słabych poddihipergrafów dihipergrafu $\mathcal{D}$ tworzy kratę algebraiczną $\mathbf{S}_w(\mathcal{D}) = \langle S_w(\mathcal{D}), \leqslant_w \rangle$.

Ponieważ będę także używać poddihipergrafów do reprezentowania silnych podalgebr, potrzebuję dodatkowo następującej definicji.

Słaby poddihipergraf $\mathcal{G} = \langle V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}}, I^{\mathcal{G}} \rangle$ dihipergrafu $\mathcal{D} = \langle V^{\mathcal{D}}, E^{\mathcal{D}}, I^{\mathcal{D}} \rangle$ jest silnym poddihipergrafem, jeśli dla każdej krawędzi e warunek $I_1^{\mathcal{D}}(e) \subseteq V^{\mathcal{G}}$ implikuje, że e należy do $\mathcal{G}$ (w szczególności $I_2^{\mathcal{D}}(e) \in V^{\mathcal{G}}$).

Zbiór wszytkich silnych poddihipergrafów dihipergrafu $\mathcal{D}$ tworzy kratę algebraiczną $\mathbf{S}_s(\mathcal{D}) = \langle S_s(\mathcal{D}), \leqslant_s \rangle$.

W (P1) definiuję również relatywne i dualnie silne poddihipergrafy dihipergrafu $\mathcal{D}$. Ich rodziny również tworzą kraty algebraiczne $\mathbf{S}_r(\mathcal{D})$ i $\mathbf{S}_d(\mathcal{D})$ odpowiednio.

Z dihipergrafem $\mathcal{D}$ można związać hipergraf $\mathcal{D}^*$ (nazywany czasami szkieletem $\mathcal{D}$), który powstaje z $\mathcal{D}$ przez pominięcie orientacji krawędzi, tzn.

$$V^{\mathcal{D}^*} = V^{\mathcal{D}}, \quad E^{\mathcal{D}^*} = E^{\mathcal{D}} \text{ i } I^{\mathcal{D}^*}(e) = I_1^{\mathcal{D}}(e) \cup \{I_2^{\mathcal{D}}(e)\} \text{ dla każdego } e \in E^{\mathcal{D}}.$$

Z aksjomatu wyboru wynika, że dla każdego hipergrafu $\mathcal{H}$, istnieje dihipergraf $\mathcal{D}$ taki, że $\mathcal{D}^* = \mathcal{H}$.

Dla dowolnego dihipergrafu $\mathcal{D}$ zachodzą (patrz (P1)),

$$\mathbf{S}_w(\mathcal{D}) \simeq \mathbf{S}_w(\mathcal{D}^*) \quad \text{i} \quad \mathbf{S}_r(\mathcal{D}) \simeq \mathbf{S}_r(\mathcal{D}^*).$$

Częściowej algebrze $\mathbf{A} = \langle A, (k^{\mathbf{A}})_{k \in K} \rangle$ typu $\langle K, \kappa \rangle$ przyporządkowuję dihipergraf $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ w następujący sposób: A jest jego zbiorem wierzchołków, a krawędziami są czwórki $\langle V_{\mathbf{a}}, \mathbf{a}, k, k^{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) \rangle$, gdzie $k^{\mathbf{A}}$ jest $\kappa(k)-$arną częściową operacją na $\mathbf{A}$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{\kappa(k)})$ jest $\kappa(k)-$elementowym ciągiem elementów z A, $V_{\mathbf{a}} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\kappa(k)}\}$ jest zbiorem wszystkich parami różnych elementów ciągu $\mathbf{a}$ oraz $k^{\mathbf{A}}$ jest określona na $\mathbf{a}$.

Dla krawędzi $\langle V_{\mathbf{a}}, \mathbf{a}, k, k^{\mathbf{A}}(\mathbf{a})\rangle$, $V_{\mathbf{a}}$ jest jej zbiorem początkowym, a $k^{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$ jest jej wierzchołkiem końcowym.

Jest to bardzo prosta reprezentacja, ale bardzo przydatna do badania krat podalgebr. Dla dowolnej częściowej algebry $\mathbf{A}$ mamy

$$\mathbf{S}_w(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{S}_w(\mathcal{D}(\mathbf{A})) \simeq \mathbf{S}_w(\mathcal{D}(\mathbf{A})^*), \quad \mathbf{S}_r(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{S}_r(\mathcal{D}(\mathbf{A})) \simeq \mathbf{S}_r(\mathcal{D}(\mathbf{A})^*),$$

$$\mathbf{S}_s(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{S}_s(\mathcal{D}(\mathbf{A})), \quad \mathbf{S}_i(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{S}_d(\mathcal{D}(\mathbf{A})).$$

Z dowodu faktu , że kraty $\mathbf{S}_s(\mathbf{A})$ i $\mathbf{S}_s(\mathcal{D}(\mathbf{A}))$ są izomorficzne, łatwo wynika, że algebra częściowa $\mathbf{A}$ jest lokalnie skończona wtedy i tylko wtedy gdy jej dihipergraf $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ jest lokalnie skończony (lokalną skończoność dihipergrafu definiujemy analogicznie jak dla algebr).

Z tych rezultatów wynika, że warunki (W.1)–(W.4) charakteryzują również kraty słabych podhipergrafów i kraty słabych poddihipergrafów.

Jednym z głównych rezultatów pracy (P1) jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 *Dwa hipergrafy mają izomorficzne kraty słabych podalgebr wtedy i tylko wtedy gdy są izomorficzne.*

Stąd wynika następujący wniosek, fundamentalny dla badań kraty słabych podalgebr i jej wpływu na kratę silnych podalgebr.

Wniosek 2 *Algebry częściowe $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ (mogą być różnych typów) mają izomorficzne kraty słabych podalgebr wtedy i tylko wtedy gdy ich hipergrafy $\mathcal{D}(\mathbf{A})^*$ i $\mathcal{D}(\mathbf{B})^*$ są izomorficzne.*

Oczywiście analogiczny fakt zachodzi również dla dihipergrafów.

Do sformułowania drugiego ważnego rezultatu z (P1) potrzebuję następującej definicji.

Definicja 3 *Niech $\mathbf{L} = \langle L, \leqslant_{\mathbf{L}}\rangle$ będzie kratą spełniającą warunki (W.1)–(W.4). Wtedy $\mathcal{U}(\mathbf{L})$ jest hipergrafem takim, że $V^{\mathcal{U}(\mathbf{L})}$ jest zbiorem wszystkich atomów kraty $\mathbf{L}$, $E^{\mathcal{U}(\mathbf{L})}$ jest zbiorem wszystkich niezerowych, nieatomowych, $\vee-$nieredukowalnych elementów kraty $\mathbf{L}$, oraz dla dowolnej krawędzi $e \in E^{\mathcal{U}(\mathbf{L})}$, $I^{\mathcal{U}(\mathbf{L})}(e) = \{v \in V^{\mathcal{U}(\mathbf{L})} \colon\ v \leqslant_{\mathbf{L}} e\}$.*

Teraz mogę przypomnieć następujący rezultat z (P1).

Twierdzenie 4 *Jeśli krata* $\mathbf{L}$ *spełnia warunki (W.1)–(W.4), to*

$$\mathbf{S}_w(\mathcal{U}(\mathbf{L})) \simeq \mathbf{L},$$

tzn. hipergraf $\mathcal{U}(\mathbf{L})$ *ma kratę słabych podalgebr izomorficzną z* $\mathbf{L}$.

Z tego rezultatu i Twierdzenia 1 otrzymujemy

Wniosek 5 *Niech* $\mathbf{A}$ *będzie algebrą częściową, a* $\mathbf{L}$ *kratą spełniającą warunki (W.1)–(W.4). Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) Kraty $\mathbf{S}_w(\mathbf{A})$ *i* $\mathbf{L}$ *są izomorficzne,*

(2) Hipergrafy $\mathcal{D}(\mathbf{A})^*$ *i* $\mathcal{U}(\mathbf{L})$ *są izomorficzne.*

Oczywiście mając taki rezultat, pytanie o to czy dana krata $\mathbf{L}$ (spełniającą warunki (W.1)–(W.4)) może być reprezentowana przez kratę słabych podalgebr częściowej algebry danego typu, sprowadza się do pytania czy dany hipergraf można "zorientować w dany typ".

Dokładniej, niech $\mathbf{L}$ będzie kratą spełniającą warunki (W.1)–(W.4)) i niech $\langle K, \kappa \rangle$ będzie danym typem algebraicznym. Istnieje algebra częściowa $\mathbf{A}$ typu $\langle K, \kappa \rangle$ taka, że $\mathbf{S}_w(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{L}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje algebra częściowa $\mathbf{A}$ typu $\langle K, \kappa \rangle$ taka, że $\mathcal{D}(\mathbf{A})^* \simeq \mathcal{U}(\mathbf{L})$.

Umiemy przyporządkować algebrze jej dihipergraf i hipergraf. Pozostał jeszcze do przetłumaczenia na język hipergrafów typ algebry.

Definicja 6 *Niech* $\mathcal{D}$ *będzie dihipergrafem i niech* $\underline{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots)$ *będzie ciągiem dowolnych liczb kardynalnych. Wtedy*

(a) [2] *Dla dowolnego skończonego (być może pustego) zbioru* $V \subseteq V^{\mathcal{D}}$*, niech*

$$E_d^{\mathcal{D}}(V) = \{e \in E^{\mathcal{D}} \colon\ I_1^{\mathcal{D}}(e) = V\} \quad i \quad d^{\mathcal{D}}(V) = |E_d^{\mathcal{D}}(V)|.$$

(b) Powiemy, że $\mathcal{D}$ *jest (dihipergrafowego) typu* $\underline{\tau}$*, jeśli* $d^{\mathcal{D}}(V) \leqslant \tau_{|V|}$ *dla każdego skończonego zbioru* $V \subseteq V^{\mathcal{D}}$.

Dihipergrafowy typ $\underline{\tau}$ *nazywamy totalnie skończonym, jeśli* $\underline{\tau}$ *jest ciągiem liczb całkowitych nieujemnych w którym prawie wszystkie wyrazy są zerowe.*

[2] Takie oznaczenie jest wprowadzone w pracy (P7), natomiast w pracach (P1), (P2) i (P5) używam $E_s^{\mathcal{D}}(V)$ i $s^{\mathcal{D}}(V)$.

Dihipergrafowy typ $\underline{\tau}$ nazywamy skończonym, jeśli $\underline{\tau}$ jest ciągiem liczb całkowitych nieujemnych. W przeciwnym wypadku $\underline{\tau}$ nazywamy nieskończonym.

Dihipergrafowy typ $\underline{\tau}$ nazywamy ściśle nieskończonym, jeśli $\underline{\tau}$ nie jest zerowym ciągiem i każdy jego wyraz jest nieskończoną liczbą kardynalną lub zerem.

(c) *Powiemy, że dihipergraf $\mathcal{D}$ typu $\underline{\tau}$ jest totalny, jeśli $d^{\mathcal{D}}(V) = \tau_{|V|}$ dla każdego skończonego zbioru $V \subseteq V^{\mathcal{D}}$.*

Oczywiście $E_d^{\mathcal{D}}(\emptyset)$ zawiera wszystkie stałe dihipergrafu $\mathcal{D}$.

Potrzebuję jeszcze jednej kombinatorycznej defincji. Dla dowolnego typu algebry $\langle K, \kappa \rangle$, niech $\mathbf{T}(K,\kappa) = (T_0(K,\kappa), T_1(K,\kappa), T_2(K,\kappa), \ldots)$ będzie ciągiem liczb kardynalnych takim, że

$$T_k(K,\kappa) = \sum_{m \geqslant k} sur(m,k) \cdot |\kappa^{-1}(m)|,$$

gdzie $sur(m,k)$ oznacza liczbę wszystkich surjekcji ze zbioru $m-$elementowego w zbiór $k-$elementowy, oraz $\sum$ i $\cdot$ oznaczają sumę i iloczyn dowolnych liczb kardynalnych.

Dokładniejsze kombinatoryczne własności tego ciągu są podane w (P2), zauważmy tylko, że (z wyjątkiem co najwyżej pierwszego elementu $T_0(K,\kappa)$) jest to ciąg nierosnący. Co więcej, jeśli $\langle K, \kappa \rangle$ jest skończonym typem (tzn. K jest skończonym zbiorem symboli operacyjnych), to $\mathbf{T}(K,\kappa)$ jest totalnie skończonym dihipergrafowym typem.

Nie jest trudno zobaczyć, że jeśli $\mathbf{A}$ jest algebrą częściową typu $\langle K, \kappa \rangle$, to dihipergraf $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ jest typu $\mathbf{T}(K,\kappa)$. Co więcej, dla dowolnego dihipergrafu $\mathcal{D}$ typu $\mathbf{T}(K,\kappa)$, istnieje częściowa algebra $\mathbf{A}$ typu $\langle K, \kappa \rangle$ taka, że $\mathcal{D}(\mathbf{A}) \simeq \mathcal{D}$.

Dla skończonego typu algebr $\langle K, \kappa \rangle$ łatwo widać, że algebra $\mathbf{A}$ typu $\langle K, \kappa \rangle$ jest totalna wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ jest totalnym dihipergrafem typu $\mathbf{T}(K,\kappa)$ (oczywiście założenie skończoności typu jest potrzebne tylko do dowodu implikacji $\Longleftarrow$).

Mając powyższe własności otrzymujemy następujący rezultat, który jest podstawą do charakteryzacji kraty słabych podalgebr algebry częściowej danego typu.

Twierdzenie 7 *Niech $\mathbf{L}$ będzie kratą spełniającą warunki (W.1)–(W.4), oraz niech $\langle K, \kappa \rangle$ będzie danym typem algebr. Wtedy $\mathbf{L}$ jest izomorficzna z kratą* *słabych podalgebr algebry typu $\langle K, \kappa \rangle$ wtedy i tylko wtedy gdy krawędzie hipergrafu $\mathcal{U}(\mathbf{L})$ mogą być zorientowane w taki sposób, że tworzą dihipergraf typu $\mathbf{T}(K, \kappa)$ (tzn. istnieje dihipergraf $\mathcal{D}$ typu $\mathbf{T}(K, \kappa)$ taki, że $\mathcal{D}^* \simeq \mathcal{U}(\mathbf{L})$).*

Ten rezultat pokazuje, że aby scharakteryzować kratę słabych podalgebr algebry częściowej danego typu, wystraczy scharakteryzować hipergrafy które mogą być zorientowane (tzn. ich krawędzie mogą być zorientowane) tak by tworzyły dihipergrafy danego (dihipergrafowego) typu.

W rozwiązaniu tego problemu (w pracy (P7)) wykorzystuję jeszcze jeden (właściwie techniczny) rezultat z pracy (P2). Do jego sformułowania potrzebuję jeszcze trzech, dość technicznych definicji.

Dihipergraf $\mathcal{D}$ nazywamy $k-$dihipergrafem (gdzie $k \in \mathbb{N}$ jest nieujemną liczbą całkowitą), jeśli $\mathcal{D}$ zawiera tylko $k-$ krawędzie (tzn. dla każdej krawędzi $e \in E^{\mathbf{D}}$, $|I_1^{\mathcal{D}}(e)| = k$). Dla $k = 1$ otrzymujemy digrafy.

W przypadku $k-$dihipergrafów można troche uprościć pojęcie typu. Mianowicie, $k-$dihipergraf $\mathcal{D}$ jest $k-$typu η (gdzie η jest liczbą kardynalną), jeśli $d^{\mathcal{D}}(V) \leqslant \eta$ dla każdego $k-$elementowego zbioru $V \subseteq V^{\mathcal{D}}$. Dihipergraf $\mathcal{D}$ $k-$typu η jest totalny, jeśli $d^{\mathcal{D}}(V) = \eta$.

Oczywiście jeśli $\mathcal{D}$ jest $k-$dihipergrafem, to każda (niezorientowana) krawędź z $\mathcal{D}^*$ ma k lub $k+1$ wierzchołków. Zatem przydatna jest również następująca definicja.

Hipergraf $\mathcal{H}$ jest $(k, k+1)-$hipergrafem (lub dokładniej, $(k, k+1)-$jednolitym hipergrafem), jeśli każda krawędź $e \in E^{\mathcal{H}}$ ma k lub $k+1$ końców (tzn. $|I^{\mathcal{H}}(e)| = k$ lub $k+1$).

Następnie, hipergraf $\mathcal{H}$ jest $k-$hipergrafem (lub dokładniej, $k-$jednolitym hipergrafem), jeśli każda krawędź $e \in E^{\mathcal{H}}$ ma k końców.

Zachodzi następujący ważny techniczny rezultat.

Twierdzenie 8 *Niech $\underline{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots)$ będzie dihipergrafowym typem, a $\mathcal{H}$ hipergrafem. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) Istnieje dihipergraf $\mathcal{D}$ typu $\underline{\tau}$ taki, że $\mathcal{D}^* \simeq \mathcal{H}$.

(b) Istnieje rodzina $\{\mathcal{H}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ słabych podhipergrafów $\mathcal{H}$ taka, że

(b.1) $\mathcal{H}_k$ jest $(k, k+1)-$hipergrafem, dla każdego $k \in \mathbb{N}$,

(b.2) $E^{\mathcal{H}} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E^{\mathcal{H}_k}$,

(b.3) *dla każdego* $k \in \mathbb{N}$, *istnieje* $k-$*dihipergraf* $\mathcal{D}_k$ $k-$*typu* τ_k *taki, że* $\mathcal{D}_k^* \simeq \mathcal{H}_k$.

Oczywiście powyżej przypomniałem tylko niektóre rezultaty z prac (P1) i (P2), tylko te które są niezbędne do zrozumienia następnych paragrafów.

2.2 Unarne algebry i ich kraty podalgebr

Oczywiście dla unarnych częściowych algebr hipergrafowy język z prac (P1) i (P2) przyjmuje prostszą postać języka grafowego. Dokładniej, w pracach (P3) i (P4) używam związków pomiędzy unarnymi algebrami a grafami, które zostały wprowadzone w pracy [*On some non-obvious connections between graphs and unary partial algebras*, K. Pióro, Czech. Math. J. 50, 295-320, 2000] (rok publikacji jest trochę mylący, ponieważ praca ta została złożona w 1996 roku). Z jednaj strony twierdzenia z tej pracy są szczególnymi przypadkami rezultatów z pracy (P1), z drugiej, praca ta zapoczątkowała badania prowadzone w pracach (P1) i (P2).

Krata silnych podalgebr unarnej częściowej algebry (a zatem również krata silnych poddigrafów digrafu) ma natępującą charakteryzację (patrz [*Topics in Universal Algebra*, B. Jónsson, LNM 250, Springer 1972]):

Krata $\mathbf{L} = \langle L, \leqslant_{\mathbf{L}} \rangle$ jest izomorficzna z kratą silnych podalgebr unarnej algebry (totalnej lub częściowej) wtedy i tylko wtedy gdy

(1) $\mathbf{L}$ jest algebraiczna i rozdzielna,

(2) każdy jej element jest kresem górnym zbioru elementów kompletnie $\vee-$nieredukowalnych.

Element i kraty $\mathbf{L}$ jest kompletnie $\vee-$nieredukowalny, jeśli dla dowolnego zbioru $F \subseteq L$, równość $i = \bigvee F$ implikuje że $i \in F$.

Zbiór wszystkich kompletnie $\vee-$nieredukowalnych elementów kraty $\mathbf{L}$ będę oznaczać przez $Ir(\mathbf{L})$.

W pracy (P3) badam dwa problemy. Po pierwsze, kiedy dwie unarne algebry (mogą być różnych typów) mają izomorficzne kraty silnych podalgebr. Po drugie, kiedy unarna algebra $\mathbf{A}$ ma kratę $\mathbf{S}_s(\mathbf{A})$ izomorficzną z daną kratą $\mathbf{L}$ (która oczywiście musi spełniać (1) i (2)). Mając związki pomiędzy unarnymi algebrami a grafami, te dwa algebraiczne problemy mają swoje naturalne grafowe odpowiedniki.

W teorii grafów jest prosta konstrukcja sklejania danego zbioru wierzchołków W digrafu $\mathcal{D}$ w jeden wierzchołek v. Wtedy każda krawędź wychodząca z (odpowiednio, wchodząca do) W zamienia się na krawędź wychodzącą z (wchodzącą do) v. Uogólniam tę konstrukcję na dowolny podział zbioru wierzchołków $V^{\mathcal{D}}$ (równoważnie, na dowolną relację równoważności θ na $V^{\mathcal{D}}$). W ten sposób otrzymuję coś w rodzaju digrafu ilorazowego, który oznaczam przez $\mathcal{D}/\theta$.

Wprowadzam następującą relację równoważności $\Theta(\mathcal{D})$ na $V^{\mathcal{D}}$: dla dowolnych $v, w \in V^{\mathcal{D}}$, $v\Theta(\mathcal{D})w$ wtedy i tylko wtedy gdy v i w generują ten sam silny poddigraf w $\mathcal{D}$.

W prosty sposób można pokazać, że dwa różne wierzchołki są w relacji $\Theta(\mathcal{D})$ wtedy i tylko wtedy gdy leżą na jednym zorientowanym cyklu. Stąd $\mathcal{D}/\Theta(\mathcal{D})$ nie ma nietrywialnych zorientowanych cykli. W szczególności, na jego zbiorze wierzchołków $V^{\mathcal{D}/\Theta(\mathcal{D})}$ mamy dobrze znany częściowy porządek $\leqslant$ zdefiniowany w następujący sposób (patrz np. [*Theory of Graphs*, O. Ore, AMS 1962]): $w \leqslant v$, jeśli są równe lub istnieje zorientowana droga z v do w.

Następnie, dowodzę, że dla dowolnego digrafu $\mathcal{D}$,

$$\mathbf{S}_s(\mathcal{D}) \simeq \mathbf{S}_s(\mathcal{D}/\Theta(\mathcal{D})).$$

Stąd wynika, że dla dowolnej kraty $\mathbf{L}$ spełniającej (1) i (2) oraz digrafu $\mathbf{D}$, krata $\mathbf{S}_s(\mathbf{D})$ jest izomorficzna z $\mathbf{L}$ wtedy i tylko wtedy gdy zbiory częściowo uporządkowane $\langle V^{\mathcal{D}/\Theta(\mathcal{D})}, \leqslant\rangle$ i $\langle Ir(\mathbf{L}), \leqslant_{\mathbf{L}}\rangle$ są izomorficzne.

Podobnie, dla dowolnych digrafów $\mathcal{D}$ i $\mathcal{G}$, kraty $\mathbf{S}_s(\mathbf{D})$ i $\mathbf{S}_s(\mathbf{G})$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy odpowiednie ich częściowe porządki są izomorficzne.

Oczywiście z tych dwóch digrafowych twierdzeń łatwo wynikają analogiczne rezultaty dla unarnych algebr.

W pracy (P4) stosuję powyższe rezultaty do pewnych unarnych algebr częściowych, których kraty silnych podalgebr spełniają pewnien warunek skończoności, nazwany w tej pracy warunkiem skończonego pokrycia (w skrócie FC). Takie kraty mają dobrą digrafową reprezentację. Dzieki tej reprezentacji mogę rozwiązać problem kiedy para krat jest izomorficzna z kratami słabych i silnych podalgebr jednej algebry.

Dokładniej, częściowo uporządkowany zbiór $\langle P, \leqslant_P\rangle$ spełnia FC, jeśli dla dowolnych elementów $p <_P q$ istnieje ciąg $p_1, p_2, \ldots, p_k$ taki że $p_1 = p$, $p_k = q$ i p_{i+1} jest pokryciem p_i dla $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Każdy skończony zbiór spełnia FC, ale w ten sposób otrzymujemy znacznie obszerniejszą klasą częściowych porządków (patrz (P4)).

Kratę $\mathbf{L}$ nazywam normalną, jeśli spełnia (1), (2) i $\langle Ir(\mathbf{L}), \leqslant_{\mathbf{L}}\rangle$ spełnia warunek FC. Taką kratę mogę reprezentować przy pomocy digrafu $\mathcal{D}(\mathbf{L})$, którego zbiorem wierzchołków jest $Ir(\mathbf{L})$ a krawędziami pary $\langle i, j\rangle$, gdzie i jest pokryciem j. Digraf $\mathcal{D}(\mathbf{L})$ jest prosty, acykliczny i każda jago krawędź jest przesmykiem (ang. isthmus).

Dla dowolnych normalnych krat $\mathbf{L}$ i $\mathbf{K}$ zachodzi

$$\mathbf{L} \simeq \mathbf{K} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{D}(\mathbf{L}) \simeq \mathcal{D}(\mathbf{K}),$$

$$\mathbf{S}_s(\mathcal{D}(\mathbf{L})) \simeq \mathbf{L}.$$

Następnie definiuję normalne digrafy. Dokładna defincja jest w pracy (P4) na strona 261, zanotujmy tylko, że jeśli digraf nie ma nieskończonych dróg, to jest normalny. W szczególności, każdy lokalnie skończony digraf (więc także każdy skończony digraf) jest normalny, ale klasa normalnych digrafów jest znacznie szersza. Oczywiście unarna częściowa algebra jest normalna, jeśli jej digraf jest normalny. Zauważmy, że każda lokalnie skończona częściowa algebra unarna jest normalna.

Z każdym normalnym digrafem $\mathcal{D}$ mogę związać digraf $\mathbf{TQ}(\mathcal{D})$ (patrz strona 261 w (P4)). Wtedy dla dowolnych normalnych digrafów $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ i normalnej kraty $\mathbf{L}$ zachodzą następujące równoważności:

$$\mathbf{S}_s(\mathcal{G}) \simeq \mathbf{L} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{TQ}(\mathcal{G}) \simeq \mathcal{D}(\mathbf{L}),$$

$$\mathbf{S}_s(\mathcal{G}) \simeq \mathbf{S}_s(\mathcal{H}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{TQ}(\mathcal{G}) \simeq \mathbf{TQ}(\mathcal{H}).$$

Stąd łatwo wynikają analogiczne rezultaty dla unarnych normalnych algebr.

W drugiej (głównej) części pracy (P4) charakteryzuję kraty słabych i silnych podalgebr jednej algebry. Dokładniej (Twierdzenie 2.2.3), niech $\mathbf{K}$ będzie kratą spełniającą warunki (W.1)–(W.4), a $\mathbf{L}$ kratą normalną. Istnieje normalna unarna algebra $\mathbf{A}$ taka, że $\mathbf{S}_w(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{K}$ i $\mathbf{S}_s(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{K}$ wtedy i tylko wtedy gdy graf $\mathcal{U}(K)$ i digraf $\mathcal{D}(\mathbf{L})$ spełniają następujący warunek: istnieje relacja równoważności θ na zbiore $V^{\mathcal{U}(K)}$ taka, że (a) każda klasa równoważności jest spójnym grafem i każda jej krawędź leży na (niezorientowanym) cyklu, (b) $\mathcal{D}(\mathbf{L})^*$ jest słabym podgrafem $\mathcal{U}(K)/\theta$ takim, że dla każdej regularnej krawędzi grafu $\mathcal{U}(K)/\theta$ istnieje zorientowana droga w $\mathcal{D}(\mathbf{L})$ z jednego jej końca w drugi.

2.3 Wpływ kraty słabych podalgebr na kratę silnych podalgebr

Punktem wyjścia tej pracy było następujące pytanie: Jeśli mamy dwie algebry o izomorficznych kratach słabych podalgebr, to czy są jakieś związki pomiędzy ich kratami silnych podalgebr. W pracy [*On a strong property of the weak subalgebra lattice*, Algebra Universalis, 40(4), 1998, 477-495] pokazałem, że w przypadku unarnych totalnych i lokalnie skończonych algebr, krata słabych podalgebr wyznacza jednoznacznie kratę silnych podalgebr. Dowód tego rezultatu jest ściśle grafowy i polega na tym, że jeśli dwa digrafy tego samego skończonego $1-$typu mają ten sam szkielet i jeden z nich jest totalny i lokalnie skończony, to te digrafy różnią się tylko orientacją pewnych zorientowanych cykli.

W przypadku algebr dowolnego typu pojawiają się trzy dodatkowe trudności. Po pierwsze, trzeba zdefiniować "odwracanie krawędzi" w dihipergrafie. W pracy (4) zrobiłem to w następujący sposób.

Weźmy dihipergraf $\mathcal{D}$ i pewien jego zbiór F regularnych krawędzi nie będących stałymi, oraz niech $U = \{u_f \in V^{\mathcal{D}}\colon\ f \in F\}$ będzie zbiorem wierzchołków takim, że $u_f \in I_1^{\mathcal{D}}(f)$ dla $u_f \in U$. Powiem, że dihipergraf $\mathcal{D}(F,U)$ jest otrzymany z dihipergrafu $\mathcal{D}$ przez odwrócenie krawędzi ze zbioru F zgodnie z U, jeśli

$$V^{\mathcal{D}(F,U)} = V^{\mathcal{D}}, \quad E^{\mathcal{D}(F,U)} = E^{\mathcal{D}},$$

$$I_i^{\mathcal{D}(F,U)}(e) = I_i^{\mathcal{D}}(e) \quad \text{dla każdego } e \in E^{\mathcal{D}} \setminus F \text{ i } i = 1,2,$$

$$I_1^{\mathcal{D}(F,U)}(e) = (I_1^{\mathcal{D}}(f) \setminus \{u_f\}) \cup \{I_2^{\mathcal{D}}(f)\} \text{ i } I_2^{\mathcal{D}(F,U)}(e) = u_f \text{ dla każdego } f \in F.$$

Łatwo pokazać (Lemat 3.1), że jeśli dihipergrafy $\mathcal{D}$, $\mathcal{H}$ mają izomorficzne szkielety (tzn. $\mathcal{D}^* \simeq \mathcal{H}^*$) i oba nie mają pętli, to $\mathcal{H}$ jest izomorficzny z dihipergrafem $\mathcal{D}(F,U)$ dla pewnych zbiorów F i U zdefiniowanych jak wyżej. Trzeba podkreślić, że ten fakt nie jest prawdziwy dla dihipergrafów z pętlami.

Po drugie, trzeba zdefiniować "drogi" w dowolnym dihipergrafie. W tej pracy przyjąłem następującą defincję.

Weźmy liczbę naturalną $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i ciąg $r = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ parami różnych regularnych $k-$krawędzi dihipergrafu $\mathcal{D}$. Ciąg r nazwiemy $k-$drogą, jeśli

$$I_2^{\mathcal{D}}(e_i) \in I_1^{\mathcal{D}}(e_{i+1}) \subseteq I_1^{\mathcal{D}}(e_i) \cup \{I_2^{\mathcal{D}}(e_i)\} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Jeśli dodatkowo

$$I_2^{\mathcal{D}}(e_m) \in I_1^{\mathcal{D}}(e_1) \subseteq I_1^{\mathcal{D}}(e_m) \cup \{I_2^{\mathcal{D}}(e_m)\},$$

to r nazywamy prostym $k-$cyklem.

Ciąg krawędzi nazywamy hiperdrogą (prostym hipercyklem), jeśli jest on $k-$drogą (prostym $k-$cyklem) dla pewnego $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mając pojęcie $k-$drogi zdefniowałem pewne uogólnienie lokalnej skończoności (Definicja 3.2), które jest rzeczywiście słabszym pojęciem.

Po trzecie, trzeba zdefiniować co to znaczy "odwrócenie orientacji" dla tak zdefiniowanych prostych hipercykli.

Weźmy prosty hipercykl $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ i zauważmy, że dla $i = 1, 2, \ldots, m$, $|I_1^{\mathcal{D}}(e_i) \setminus I_1^{\mathcal{D}}(e_{i+1})| = 1$. Jedyny element tej różnicy oznaczamy przez u_i. Teraz przez odwrócenie orientacji prostego hypercyklu $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ rozumiemy wzęcie dihipergrafu $\mathcal{D}(\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}, \{u_1, u_2, \ldots, u_m\})$.

Podobnie postępujemy z dowolną rodziną parami krawędziowo rozłącznych prostych hypercykli.

Weźmy teraz dihipergraf $\mathcal{D}$ totalnie skończonego typu $\underline{\tau}$, który jest lokalnie skończony (lub ogólniej, słabo lokalnie skończony) totalny i nie ma pętli. Wtedy (Lemat 3.4 i Twierdzenie 3.6 oraz jego dowód) dla dowolnego dihipergrafu $\mathcal{H}$ tego samego typu $\underline{\tau}$, jeśli $\mathcal{H}$ ma taki sam szkielet jak $\mathcal{D}$, to powstaje z $\mathcal{D}$ przez odwrócenie orientacji prostych hipercykli, które są parami krawędziowo rozłączne.

Stąd łatwo wynika, że takie dihipergrafy mają, w szczególności, izomorficzne kraty silnych poddihipergrafów. Co więcej, $\mathcal{H}$ też nie ma pętli, jest lokalnie skończony i totalny.

Totalna skończoność dihipergrafowego typu $\underline{\tau}$ tłumaczy się na skończoności algebraicznego typu $\langle K, \kappa \rangle$.

Niestety naturalne hipergrafowe założenie ze dihipergrafy nie mają pętli ogranicza klasę algebr dla których można stosować ten wynik. Dokładniej, dihipergraf $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ algebry $\mathbf{A}$ typu $\langle K, \kappa \rangle$ nie ma pętli wtedy i tylko wtedy gdy algebra $\mathbf{A}$ spełnia następujący warunek: $k^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{\kappa(k)}) \neq a_i$ dla każdego $k \in K$, dowolnych $a_1, \ldots, a_{\kappa(k)} \in A$ oraz $i = 1, 2, \ldots, \kappa(k)$.

Podsumowując (Wnioski 3.7 i 3.8), niech $\mathbf{A} = \langle A, (k^{\mathbf{A}})_{k \in K} \rangle$ będzie totalną i lokalnie skończoną (lub ogólniej, słabo lokalnie skończoną) algebrą skończonego typu $\langle K, \kappa \rangle$, która dodatkowo spełnia powyższy warunek. Wtedy dla dowolnej algebry $\mathbf{B} = \langle B, (k^{\mathbf{B}})_{k \in K} \rangle$ tego samego typu $\langle K, \kappa \rangle$, jeśli kraty słabych podalgebr algebr $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są izomorficzne, to algebry te mają również izomorficzne kraty silnych podalgebr, oraz **B** jest totalna, lokalnie skończona i też spełnia powyższy warunek.

2.4 Charakteryzacja krat słabych podalgebr

W pracy (P7) zcharakteryzowałem kratę słabych podalgebr algebry danego typu. Dokładniej, rezultaty z prac (P1) i (P2) pokazują, że ten algebraiczny problem jest równoważny następującemu bardzo naturalnemu hipergrafowemu pytaniu (które jest intersujące samo w sobie): Dany jest (dihipergrafowy) typ $\underline{\tau}$ i hipergraf $\mathcal{H}$. Kiedy istnieje dihipergraf $\mathcal{D}$ typu $\underline{\tau}$ taki, że $\mathcal{D}^* = \mathcal{H}$? Dla uproszczenia będę pisał, że hipergraf $\mathcal{H}$ może być zorientowany w typ $\underline{\tau}$, jeśli taki dihipergraf $\mathcal{D}$ istnieje.

Dzieki Twierdzeniu 8 można ten problem zredukować jeszcze do $(k, k+1)-$hipergrafów i $k-$typów. Podobnie $(k, k+1)-$hipergraph może być zorientowany w $k-$typ η, jeśli istnieje $k-$dihipergraf $\mathcal{D}$ $k-$typu η taki, że $\mathcal{D}^* = \mathcal{H}$.

W pierwszej części pracy (P7) rozwiązuję ten problem dla skończonych (dihipergrafowych) typów (a więc również algebraiczny problem dla skończonych typów algebr). Ten przypadek ma bardzo eleganckie (i krótnie w sformułowaniu) kombinatoryczne rozwiązanie.

Pierwszy ważny rezultat pokazuje, że hipergraf $\mathcal{H}$ może być zorientowany w skończony typ $\underline{\tau}$ wtedy i tylko wtedy gdy każdy jego skończony słaby podhipergraf może być skierowany w ten typ.

Następnie dowodzę, że skończony $(k, k+1)-$hipergraf $\mathcal{H}$ może być zorientowany w skończony $k-$typ $m \in \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego słabego podhipergrafu $\mathcal{K}$ hipergrafu $\mathcal{H}$ mamy

$$|E^{\mathcal{K}}| \leqslant m \cdot |U^{\mathcal{K}}(k; k, k+1)|,$$

gdzie $U^{\mathcal{K}}(k; k, k+1)$ jest zbiorem wszystkich $k-$elementowych zbiorów $W \subseteq V^{\mathcal{K}}$ takich, że $W \subseteq I^{\mathcal{K}}(e)$ dla pewnego $e \in E^{\mathcal{K}}$. Ponieważ $\mathcal{K}$ jest $(k, k+1)-$hipergrafem, więc dodatkowe warunki z Definicji 2.4 można tu pominąć.

Te dwa rezultaty, razem z Twiedzeniem 8, rozwiązują nasz hipergrafowy problem w przypadku skończonych (dihipergrafowych) typów.

W drugiej części pracy (P7) zajmuję się problemem dla nieskończonych (dihipergrafowych) typów. Pokazuję najpierw (Proposition 3.1), że hipergraf $\mathcal{H}$ może być zorientowany w nieskończony typ $\underline{\tau}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{H}$ można rozłożyć na dwa słabe podhipergrafy $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ takie, że pierwszy z nich może być zorientowany w skończony typ $\underline{\tau}^1$, a drugi w ściśle nieskończony typ

$\underline{\tau}^2$, gdzie dla każdego $i \in \mathbb{N}$, $\tau_i^1 = 0$ i $\tau_i^2 = \tau_i$, jeśli τ_i jest nieskończoną liczbą kardynalną; oraz $\tau_i^1 = \tau_i$ i $\tau_i^2 = 0$, jeśli τ_i jest skończoną liczbą kardynalną.

W ten sposób podzieliłem problem w przypadku nieskończonych typów na dwa oddzielne przypadki: przypadek skończony (który już jest rozwiązany) i ściśle nieskończony.

W drugim kroku pokazuję, że rozkład z Twierdzenia 8 jest jednoznaczny (Proposition 3.2). Co więcej wystarczy ograniczyć się badania tylko niektórych hipergrafów z tego rozkładu.

Dokładniej, weźmy hipergraf $\mathcal{H}$ i ściśle nieskończony (dihipergrafowy) typ $\underline{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots)$. Następnie, niech $\mathcal{H}_k$ będzie słabym podhipergrafem $\mathcal{H}$ takim, że

$$E^{\mathcal{H}_k} = \{e \in E^{\mathcal{H}}\colon\ |I^{\mathcal{H}}(e)| = k+1 \text{ i } h^{\mathcal{H}}(I^{\mathcal{H}}(e)) > \tau_{k+1}\},$$

gdzie $h^{\mathcal{H}}(V) = |\{e \in E^{\mathcal{H}}\colon\ I^{\mathcal{H}}(e) = V\}|$. Oczywiście jest to $k+1-$hipergraf.

Wtedy $\mathcal{H}$ może być zorientowany w typ $\underline{\tau}$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$,

(1) jeśli $\tau_k \leqslant \tau_{k+1}$, to $h^{\mathcal{H}}(V) \leqslant \tau_{k+1}$ dla każdego skończonego $V \subseteq V^{\mathcal{H}}$,

(2) jeśli $\tau_k > \tau_{k+1}$, to $\mathcal{H}_k$ może być zorientowany w $k-$typ τ_k.

Zatem pozostaje tylko scharakteryzwać $(k, k+1)-$hipergrafy $\mathcal{H}$, które mogą być zorientowane w dany nieskończony $k-$typ $\eta \geqslant \aleph_0$.

Co więcej, możemy się ograniczyć do $(k, k+1)-$hipergrafów $\mathcal{H}$, które spełniają następujący oczywisty warunek konieczny (pokazany w pracy (P2)):

$$h^{\mathcal{H}}(V) \leqslant \eta \ \text{ dla każdego skończonego i niepustego } \ V \subseteq V^{\mathcal{H}}.$$

Dla takich $(k, k+1)-$hipergrafów zachodzi rezultat (Theorem 3.9):

$(k, k+1)-$hipergraf $\mathcal{H}$ (gdzie $k \geqslant 1$) może być zorientowany w nieskończony $k-$typ $\eta \geqslant \aleph_0$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje algebraiczny operator domknięcia $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ na zbiorze wierzchołków $V^{\mathcal{H}}$ taki, że

(1) $|\mathcal{C}_{\mathcal{H}}(W)| \leqslant \max\{\eta, W\}$ dla każdego $W \subseteq V^{\mathcal{H}}$,

(2) dla każdego $W \subseteq V^{\mathcal{H}}$ i każdego $v \in V^{\mathcal{H}} \setminus \mathcal{C}_{\mathcal{H}}(W)$, $(k-1, k)-$hipergraf $\mathcal{H}(\mathcal{C}_{\mathcal{H}}(W), v)$ może być zorientowany w nieskończony $k-1-$typ η, gdzie $\mathcal{H}(\mathcal{C}_{\mathcal{H}}(W), v)$ jest hipergrafem o zbiorze wierzchołków W, zbiorze krawędzi $\{e \in E^{\mathcal{H}}\colon\ I^{\mathcal{H}}(e) \cap W \neq \emptyset\}$ i $I^{\mathcal{H}(\mathcal{C}_{\mathcal{H}}(W), v)}(e) = I^{\mathcal{H}}(e) \cap W$ dla każdej krawędzi e.

To twierdzenie daje "rekurencyjny" sposób sprawdzania czy $(k, k+1)-$hipergraf $\mathcal{H}$ może być zorientowany w nieskończony $k-$typ, ponieważ $1-$hipergraf $\mathcal{H}$ może być zorientowany w (skończony lub nieskończony) $0-$typ η wtedy i tylko wtedy gdy $|E^{\mathcal{H}}| \leqslant \eta$. Ten prosty fakt jest udowodniony w pracy (P2).

Z powyższych rezultatów otrzymuję, że hipergraf $\mathcal{H}$ może być zorientowany w ściśle nieskończony typ $\underline{\tau}$ wtedy i tylko wtedy zachodzą warunki:

(a) $h^{\mathcal{H}}(V) \leqslant \max\{\tau_{|V|-1}, \tau_{|V|}\}$ dla każdego skończonego $\emptyset \neq V \subseteq V^{\mathcal{H}}$,

(b) jeśli $\tau_0 \geqslant \tau_1$, to $|\{e \in E^{\mathcal{H}}\colon\ |I^{\mathcal{H}}(e)| = 1, h^{\mathcal{H}}(I^{\mathcal{H}}(e)) > \tau_1\}| \leqslant \tau_0$,

(c) dla każdego $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, jeśli $\tau_k > \tau_{k+1}$, to $(k+1)-$hipergraf $\mathcal{H}_k$ spełnia warunki (2) i (3),
gdzie $\mathcal{H}_k$ jest słabym podhipergrafem $\mathcal{H}$ takim, że $E^{\mathcal{H}_k} = \{e \in E^{\mathcal{H}}\colon |I^{\mathcal{H}}(e)| = k+1 \text{ i } h^{\mathcal{H}}(I^{\mathcal{H}}(e)) > \tau_{k+1}\}$.

Na zakończnie przypomnijmy klasyczny rezultat (patrz np. [*Algebraic Theory of Lattices*, P. Crawley, R.P. Dilworth, Prentice Hall Inc. 1973]), że algebraiczna i rozdzielna krata, w której każdy element jest kresem górnym pewnego zbioru zupełnie $\vee-$nieredukowalnych elementów, jest izomorficzna z kratą wszystkich porządkowych ideałów na zbiorze jej wszystkich zupełnie $\vee-$nieredukowalnych elementów.

Oczywiście dla kraty $\mathbf{L}$, która spełnia warunki (W.1)–(W.4), zbiór wszystkich niezerowych $\vee-$nieredukowalnych elementów jest zbiorem jej wszystkich zupełnie $\vee-$nieredukowalnych elementów.

Weźmy teraz pewien zbiór A atomów kraty i pewien zbiór I niezerowych i nieatomowych $\vee-$nieredukowalnych elementów kraty takich, że dla każdego $i \in I$, wszystkie atomy zawarte w i należą do zbioru A. Wtedy z powyższych faktów łatwo wynika, że podkrata zupełna $[A \cup I]_{\mathbf{L}}$ generowana przez $A \cup I \cup \{0\}$ składa się tylko z sum elementów ze zbioru $A \cup I \cup \{0\}$. Stąd, po pierwsze, A jest zbiorem jej wszystkich atomów, a I jest zbiorem jej wszystkich niezerowych, nieatomowych i $\vee-$nieredukowalnych elementów. Po drugie, $[A \cup I]_{\mathbf{L}}$ spełnia warunki (W.1)–(W.4). W szczególności, $\mathcal{U}([A \cup I]_{\mathbf{L}})$ jest słabym podhipergrafem $\mathcal{U}(\mathbf{L})$. Co więcej, dla dowolnego słabego podhipergrafu $\mathcal{H}$ hipergrafu $\mathcal{U}(\mathbf{L})$ mamy, że $\mathcal{U}([V^{\mathcal{H}} \cup E^{\mathcal{H}}]_{\mathbf{L}}) = \mathcal{H}$.

Zatem wszystkie powyższe warunki na podhipergrafy hipergrafu $\mathcal{U}(\mathbf{L})$ można przetłumaczyć na specjalne podkraty kraty $\mathbf{L}$, otrzymując w ten sposób algebraiczny opis krat które mogą być reprezentowane przez algebry częściowe danego typu. Oczywiście otrzyma się w ten sposób skomplikowane i długie warunki. Również dlatego język hyipergrafowy jest tak przydatny.

2.5 Przykład pewnej quasigrupy z rozdzielną kratą podquasigrup

Zacznijmy od przypomnienia klasycznego rezultatu udowodnionego przez O. Ore'go (patrz, np. *Subgroup Lattices of Groups*, Schmidt, R., Walter de Gruyter, 1994), że grupa ma rozdzielną kratę podgrup wtedy i tylko wtedy gdy jest lokalnie cykliczna. W pracy [*On finite quasigroups whose subquasigroups lattices are distributive*, K. Pióro, Quasigroups and related systems (Inst. of Math., Moldovian Academy of Sciences) 15, s. 309-316, 2007] pokazałem, że skończona quasigrupa z rozdzielną kratą podquasigrup jest cykliczna (tzn. ma jeden generator) i co więcej, każda jej podquasigrupa też jest cykliczna. Natępnie skonstruowałem kilka przykładów, które pokazują, że odwrotna implikacja nie jest prawdziwa.

Pozostało natomiast bardzo naturalne i ciekawe pytanie jak jest w przypadku nieskończonym. I właśnie tym zająłem się w pracy (P6). Po pierwsze, modyfikując troche dowód pokazałem ze warunek skończoności można zamienić na warunek malejących łańcuchów. Jednak głównym celem pracy jest konstrukcja przemiennej quasigrupy, która jest generowana przez dwa elementy, ma rozdzielną kratę podquasigrup, ale nie jest cykliczna (czyli nie ma jednego generatora). Oczywiście taka quasigrupa musi być nieskończona. Zatem nieskończony przypadek jest zupełnie inny niż przypadek skończonych quasigrup. Co więcej, to pokazuje, że dla quasigrup rozdzielność kraty podquasigrup jest znacznie słabszym warunkiem niż dla grup.

W tej pracy w jawny sposób nie korzystam z hipergrafowego języka, natomiast wszystkie konstrukcje są oparte na "patrzeniu" na algebry jak na dihipergrafy. Dla przykładu, weźmy przemienny grupoid $\langle G, \circ\rangle$. Wtedy dla każdej pary różnych elementów x, y mamy $2-$krawędź $\langle\{x, y\}, x \circ y\rangle$ oraz $1-$krawędź $\langle\{x\}, x \circ x\rangle$. Z drugiej strony, jesli mamy dihipergraf typu (0,1,1,0,0,...) (tzn. z każdego wierzchołka v wychodzi jedna $1-$krawędź $\langle\{v\}, w\rangle$ oraz każdy zbiór dwu-elementowy $\{v, u\}$ jest początkowym zbiorem jednej $2-$krawędzi $\langle\{v, u\}, w\rangle$), to można zdefiniować działanie binarne $\circ$ w następujący sposób $v \circ v = w$ i $v \circ u = u \circ v = w$. W ten sposób otrzymujemy przemienny grupoid. Oczywiście sytuacja dla quasigrup jest bardziej skomplikowana, bo mamy trzy operacje, które spelniają równości quasigrupy.

Moja konstrukcja quasigrupy wykorzystuje również częściowe algebry. Dokładniej, konstruuję różne ciągi częściowych algebr z unarymi i binarnymi operacjami. Z tych ciągów powstaje pewna totalna algebra z jedną binarną operacją i przeliczalnie wieloma unarnymi opercjami, która ma rozdzielną kratę podalgebr, ma dwa generatory i nie ma jednego generatora. Na nośniku tej algebry, korzystając z jej struktury buduję przemienny grupoid mający te same własności. Następnie, modyfikując jeszcze trochę tę konstrukcję otrzymuję żądaną quasigrupę.

3 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Jak już było wspomniane wyżej, w pracy (P9) pokazałem, że skończona quasigrupa z rozdzielną kratą podquasigrup jest cykliczna (tzn. ma jeden generator) i co więcej, każda jej podquasigrupa też jest cykiczna. Pokazałem również, że warunek rozdzielności kraty podquasigrup może być zastąpiony przez trochę słabszy warunek. Następnie skonstruowałem kilka przykładów, które pokazują, że odwrotna implikacja nie jest prawdziwa. Dokładniej, najpierw skonstruowałem cztero-elementową quasigrupę, której każda podquasigrupa jest cykliczna, ale jej krata podquasigrup nie jest cykliczna. Następnie, skonstruowałem pięcio-elementową przemienną quasigrupę o takich własnościach. Warto zaznaczyć, że te pięć elementów jest liczbą minimalną, ponieważ udowodniłem, że dla każdej przemiennej quasigrupy z co najwyżej czterema elementami, jeśli każda jej podgrupa jest cykliczna, to quasigrupa ma rodzielną kratę podquasigrup.

Konstuuję również sześcio-elementową quasigrupę cykliczną, której podquasigrupy właściwe nie są cykliczne.

W pracy (P10) pokazuję, że żaden prosty graf nie ma właściwego podgrafu, który ma ten sam hipergraf sąsiedztw. Hipergrafem sąsiedztw związanym z grafem $\mathcal{G}$ nazywamy hipergraf, którego krawędzie są postaci $N_{\mathcal{G}}(v)$, gdzie $N_{\mathcal{G}}(v)$ jest zbiorem wszystkich sąsiadów wierzchołka v. Wnioskiem z tego twierdzenia jest nasępujący fakt: jeśli hipergraf klików $\mathcal{H}$ i hipergraf $\mathcal{K}$ mają ten sam hipergraf sąsiedztw, oraz relacja sąsiedztwa w $\mathcal{H}$ jest podrelacją takiej relacji w $\mathcal{K}$, to $\mathcal{K}$ jest wpisany w $\mathcal{H}$ (tutaj oba hipergrafy są traktowane jako pokrycia). W szczególności, jeśli $\mathcal{K}$ jest także hipergrafem klików, to $\mathcal{K} = \mathcal{H}$.

Punktem wyjścia prac (P11) i (P12) jest następujący naturalny algebraiczny problem: Kiedy unarna częściowa algebra $\mathbf{A}$ typu K jest jednoznacznie wyznaczona (oczywiście z dokładnością do izomorfizmu) przez jej kratę słabych podalgebr w klasie wszystkich unarnych częściowych algebr tego samego typu K? W przypadku unarnych algebr przez typ można rozumieć po prostu zbiór symboli operacyjnych K.

Z paragrafu 2.1 widac, że poza przypadkiem monounarnych algebr, nie ma możliwości odtworzenia samej algebry, natomiast można próbować odtworzyć jej digraf. Zatem algebraiczny problem przyjmuje następującą grafową postać: Kiedy digraf $\mathcal{D}$ typu η (lub bardziej precyzyjnie, $1-$typu η) jest jednoznacznie wyznaczony przez jego szkielet $\mathcal{D}^*$? Własnie ten problem jest rozwiązany w pracach (P11) i (P12).

Praca (P13) zajmuje się problemem kiedy dane pokrycie zbioru pochodzi od pewnej tolerancji na tym zbiorze.

Praca (P14) pokazuje, że grupoid z rozdzielną kratą podgrupoidów, spełniający pewnien dodatkowy warunek, jest w pewnym sensie unarną algebrą.

W pracach (P20), (P21), (P23) i (P24) badam zależności pomiędzy kratami silnych, relatywnych, słabych poalgebr i odcinków początkowych jednej unarnej częściowej algebry. Dokładniej, prace (P23) i (P24) dają pewne proste warunki konieczne. Te częściowe rezultaty dają warunki konieczne i dostateczne dla monounarnych algebr. Pierwsza z tych prac zawiera także inny, krótszy, dowód charakteryzacji kraty słabych podalgebr. Prace (P20) i (P21) rozwiązują ten problem dla skończonych unarnych algebr częściowych. Oczywiście rozwiązanie wykorzystuje grafowy język.

W pracach (P22) i (P25) charakteryzuję kraty słabych podalgebr unarnej algebry częściowej danego typu (w pierwszej pracy dla skończonych typów, a w drugiej dla nieskończonych typów). Oczywiście rezultaty tych prac są bardzo szczególnymi przypadkami twierdzeń z pracy (P7). Natomiast dały one wskazówki w jaki posób zabrać się za ogólny przypadek, który jest znacznie bardziej skomplikowany.

W praca (P26) dowodzę, że dla lokalnie skończonej unarnej (totalnej) algebry skończonego typu krata słabych podalgebr jednoznacznie wyznacza kratę silnych podakgebr. Dowód tego rezultatu jest właściwe czysto grafowy i co więcej, otrzymujemy przy okazji bardzo ładny grafowy fakt. Ta praca wyraźnie pokazuje, że związki pomiędzy kratami podalgebr a hipergrafami mogą być głębokie.

(P27) jest moją pierwszą pracą. Pokazałem w niej, że do badania krat podalgebr unarnych algebr warto wykorzystać język grafowy. Praca ta dała początek badaniom prowadzonym w (P1) i (P2). Trzeba podkreślić, że rok publikacji jest mylący, ponieważ praca została złożona w roku 1996.

4 Pozostałe publikacje

(P8) K. Pióro, *Subalgebra lattices of a partial unary algebra* przyjęta do druku w Demonstratio Math., 2012

(P9) K. Pióro, *On finite quasigroups whose subquasigroups lattices are distributive*, Quasigroups and related systems (Inst. of Math., Moldovian Academy of Sciences) 15, 309-316, 2007.

(P10) K. Pióro, *On a property of neighborhood hypergraphs*, Comment. Math. Univ. Carolin. 47, 149-154, 2006.

(P11) K. Pióro, *On some graph problem in the theory of partial algebras - Part I*, Discrete Mathematics 283(1-3), 167-187, 2004.

(P12) K. Pióro, *On some graph problem in the theory of partial algebras - Part II*, Discrete Mathematics 283(1-3), 189-204, 2004.

(P13) W. Bartol, J. Miró, K. Pióro i F. Rosselló, *On the coverings by tolerance classes*, Inf. Sci. 166(1-4), 193-211, 2004.

(P14) K. Pióro, *On some finite groupoids with distributive subgroupoid lattices* Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications 22, 25-31, 2003.

(P15) K. Pióro, *On subgrupoid lattices of some finite groupiod.* Acta Math. Univ. Comenianae 72, 147-157, 2003.

(P16) K. Pióro, *n-functional digraphs uniquely determined by the skeleton*, Colloq. Math. 91, 79-89, 2002.

(P17) K. Pióro, *n-functionality of graphs*, Colloq. Math. 90, 269-275, 2001.

(P18) K. Pióro, *On some influence of the weak subalgebra lattice on the subalgebra lattice*, Beiträge zur Algebra und Geometrie 42, 185-202, 2001.

(P19) K. Pióro, *A note on the weak subalgebra lattice of a unary algebra with constants*, Publ. Math. Debrecen 58 (2001), no. 3, 337–351.

(P20) K. Pióro, *On subalgebra lattices of a finite unary algebra, II*, Mathematica Bohemica 126, 171-181, 2001.

(P21) K. Pióro, *On subalgebra lattices of a finite unary algebra, I*, Mathematica Bohemica 126, 161-170, 2001.

(P22) K. Pióro, *The weak subalgebra lattice of a unary partial algebra of a given infinite unary type*, Math. Slovaca 51, 25-44, 2001.

(P23) K. Pióro, *A few notes on subalgebra lattices, Part II.* Demonstratio Math. 34, 33-42, 2001.

(P24) K. Pióro, *A few notes on subalgebra lattices, Part I.* Demonstratio Math. 33, 695-706, 2000.

(P25) K. Pióro, *The weak subalgebra lattice of a unary partial algebra of a given finite unary type*, Acta Sci. Math. (Szeged) 65, 439-460, 1999.

(P26) K. Pióro, *On a strong property of the weak subalgebra lattice*, Algebra Universalis 40, 477-495, 1998.

(P27) K. Pióro, *On some non-obvious connections between graphs and unary partial algebras*, Czech. Math. J. 50, 295-320, 2000.

Konrad Pióro

Konrad Pióro