Prof. dr hab. Marek Izydorek
Wydział FTiMS
Politechnika Gdańska
80-233 Gdańsk
ul. G. Narutowicza 11/12

Gdańsk, dn. 15 maja 2024 r.

RECENZJA
rozprawy doktorskiej mgra Jacka Kubicy
pt. "The Pitchfork bifurcation in the Kuramoto-Sivashinsky PDE."

Zagadnienia związane ze zjawiskami bifurkacyjnymi dotyczącymi rozwiązań rozmaitych typów zwyczajnych i cząstkowych równań różniczkowych z parametrem cieszą się wciąż niesłabnącym zainteresowaniem nie tylko wśród matematyków. Do uzyskiwania wyników ilościowych i jakościowych w tym zakresie wykorzystuje się szerokie spektrum metod badawczych: począwszy od głębokich twierdzeń analizy funkcjonalnej, poprzez zaawansowane technicznie metody topologiczne, po estymacje numeryczne pozwalające na przeprowadzenie ścisłych matematycznie dowodów wspomaganych komputerowo.

Celem recenzowanej rozprawy jest wykazanie istnienia bifurkacji typu „pitchfork" oraz zaprezentowanie narzędzi pozwalających na ścisłą matematycznie, numeryczną weryfikację dynamiki w otoczeniu punktu bifurkacji rozwiązań równania Kuramoto – Shivashinskiego (równania KS):

$$u_t = -\mu u_{xxxx} - u_{xx} + (u^2)_x, \qquad \mu > 0$$

gdzie, $x \in R$, $u(t,x) \in R$ oraz $u(t,-x) = -u(t,x)$ i $u(t,x) = u(t,x+2\pi)$.

Zarówno metodyka, jak i techniki badawcze opisane w rozprawie wykorzystują w sposób istotny wyniki uzyskane przez promotora przewodu doktorskiego prof. P. Zgliczyńskiego w latach 2001-2003 ([13], [14] oraz [12] wspólnie z K. Mischaikowem). Ponadto, należy wspomnieć o artykule [15] z 2015 roku, w którym promotor rozważa m.in. problem bifurkacji typu „pitchfork" dla równania KS z takimi samymi jak w rozprawie ograniczeniami.

Praca po wstępie podzielona jest na osiem rozdziałów stanowiących jej główną część oraz na sześć rozdziałów uzupełniających. Wstęp zawiera krótką informację o podstawowym obiekcie badań, którym jest równanie Kuramoto-Shivashinskiego z parametrem rzeczywistym oraz opis głównych wyników rozprawy. Tytuł rozdziału pierwszego dosyć szczegółowo opisuje jego zawartość. Znajdujemy tam ważną dla dalszych rozważań definicję „ε-izolującego kuboidu" w przestrzeni Hilberta (Definicja 1.2), który jest specjalnym przypadkiem bloku izolującego dla lokalnych semi-potoków. Nie mniej istotną rolę w prezentowanych badaniach pełni „*warunek stożka*" podany w Definicji 1.8.

W oparciu o te pojęcia autor formułuje i dowodzi twierdzenia o istnieniu punktu stałego lokalnego semi-potoku i stabilnej oraz niestabilnej rozmaitości w ε-izolującym kuboidzie. Końcowa część tego rozdziału poświęcona jest dyskusji dotyczącej definicji punktu hiperbolicznego (Definicja 1.18.) w sytuacji, gdy mamy do czynienia z punktem stacjonarnym lokalnego semi-potoku. Zdefiniowane są „*silne warunki stożka*" (Definicja

1.20) oraz udowodnione jest Twierdzenie 1.21 mówiące, że punkt stały lokalnego semi-potoku, który istnieje na mocy wcześniejszych rozważań jest punktem hiperbolicznym.

W rozdziale drugim autor rozprawy przedstawia na dwóch prostych przykładach równań różniczkowych zwyczajnych z parametrem strategię badania dynamiki w otoczeniu punktu bifurkacji typu „pitchfork". Pierwszy model dwuwymiarowy dotyczy przypadku, w którym nie występują kierunki niestabilne. Drugi model stanowi modyfikację pierwszego poprzez dopisanie kolejnego (trzeciego) równania wymuszającego kierunek niestabilny.

Trzeci rozdział zawiera bardzo krótki opis metody rozwijanej przez P. Zgliczyńskiego w latach 2001-2003 nazywanej po angielsku *„self-consistent bounds"* . W szczególności podana jest definicja *„self-consistent bounds for F "* (Definicja 3.3). Należy nadmienić, że poza pracą [11], to pojęcie jest istotnie wykorzystywane w pracy [15] (Definicja 2.1.). W wielkim skrócie, jest to zwarty podzbiór przestrzeni Hilberta, spełniający pewne dodatkowe warunki techniczne związane z określonym na tym zbiorze odwzorowaniem F.

W rozdziale czwartym sformułowane są dwa techniczne twierdzenia (Twierdzenie 4.4. i Twierdzenie 4.7.) uzasadniające możliwość stosowania metody projekcji Galerkina do badania lokalnych semi-potoków dla *self-consistent bounds*, które są *„niezmiennicze w przód"* (*forward-invariant*) lub są izolującymi kuboidami. Dowód Twierdzenia 4.7. jest modyfikacją dowodu Twierdzenia 13 w pracy [13]. Na stronie 27 autor sugeruje przeprowadzenie dowodu Twierdzenia 4.4., lecz zaraz po sformułowaniu tego twierdzenia przechodzi do innych rozważań. Do tematu wrócę w końcowej części recenzji. W technicznym rozdziale piątym podane są sposoby weryfikacji *warunku stożka* oraz *silnych warunków stożka* w kontekście *„self-consistent bounds dla F "* .

W rozdziale szóstym p. Jacek Kubica formułuje i dowodzi Twierdzenie 6.9., które stanowi jeden z głównych wyników jego rozprawy doktorskiej. Twierdzenie mówi o istnieniu bifurkacji typu „pitchfork" dla parametru $\mu=1$ w problemie (33), który otrzymany jest z układu (30) (to jest układ, który pojawia się na początku rozprawy jako (3)) poprzez odpowiednią zamianę zmiennych (Lemat 6.1.). Dowodowi tego twierdzenia poświęcony jest cały Podrozdział 6.2.

W tym podrozdziale sformułowanych i udowodnionych jest pięć lematów (6.4.-6.8.), przy pomocy których w dowodzie głównego Twierdzenia 6.9. pan mgr Kubica uzasadnia kolejno warunki (P1)-(P3) wymienione w Definicji 2.2. Warunki (P1)-(P3) opisują dynamikę w ustalonym ε-izolującym kuboidzie dla sparametryzowanej rodziny lokalnych semi-potoków w sytuacji, gdy występuje bifurkacja typu „pitchfork".

W rozdziale siódmym autor dokonuje szeregu operacji rachunkowych zmierzających do uzyskania estymacji, które mogą być weryfikowane komputerowo z użyciem arytmetyki przedziałowej. Mają one służyć uzyskaniu informacji o zakresie parametru, dla którego można zweryfikować numerycznie istnienie bifurkacji, nie wykluczając przypadku w którym występują kierunki niestabilne.

Kolejne techniczne szacowania przeprowadzone są w rozdziałach uzupełniających: Appendix C, D oraz E. W szczególności, w rozdziale Appendix D przedstawiony jest wspomagany komputerowo dowód istnienia bifurkacji typu „pitchfork" dla równania KS z podanym *explicite* zakresem parametru μ. Twierdzenia 12.1. i 12.2. uznałbym za drugi główny rezultat rozprawy doktorskiej mgra Jacka Kubicy.
Krótki rozdział ósmy zawiera Twierdzenie 8.1. pozwalające, po zweryfikowaniu komputerowym jego założeń, na uzyskanie kontynuacji rozwiązań heteroklinicznych.

Rezultat tych rozważań sformułowany jest w Twierdzeniu 8.2., który również dopisałbym do listy głównych rezultatów uzyskanych w recenzowanej rozprawie.

Podział pracy na rozdziały, zaproponowany przez autora, jest w sposób naturalny dostosowany do przyjętej metody prezentacji problemu. Tytuły poszczególnych części dysertacji odpowiadają ich merytorycznej zawartości. Nie zmienia to faktu, że cała rozprawa zredagowana jest w taki sposób, że jej czytanie przynajmniej dla mnie było kłopotliwe. Sam tytuł rozdziału nie zastąpi kilku zdań wstępu, które powinny wyjaśniać jaką rolę pełnią lub pełnić będą poruszane zagadnienia w dążeniu do uzyskania końcowego rezultatu badawczego. Poza dość ogólnikowym opisem zawartości rozprawy, we wstępie brakuje mi bardziej szczegółowych komentarzy uzasadniających znaczenie rozważanej problematyki. W szczególności, jak ta problematyka wpisuje się w szerszy kontekst zagadnień dotyczących obecnie prowadzonych badań wspieranych komputerowo (popularność tego typu badań, wiodące ośrodki na świecie, itp.). Brakuje mi również precyzyjnych odniesień do wcześniejszych prac, którymi autor motywuje swoje badania. W szczególności nie ma głębszej analizy porównawczej wyników uzyskanych przez P. Zgliczyńskiego w pracy [15] z wynikami uzyskanymi przez autora rozprawy. W rozdziale pierwszym, poza odesłaniem czytającego do literatury dotyczącej teorii Conley'a nie cytuje się prac, z których pochodzą definiowane tam pojęcia, w szczególności: postać zbioru T (Uwaga 1.3.), warunek stożka (Definicja 1.8.), dysk poziomy i dysk pionowy (Definicje 1.11. i 1.12), itd.

W definicji „*self-consistent bounds for F* " (Definicja 3.3.) użyty jest wielowskaźnik „I", który w dalszej części pracy się nie pojawia. Ponadto nie jest jasne, o czym mówi warunek (C4a), prawdopodobnie litera „a" jest zbędna.

W rozdziale czwartym na str. 27 mgr Kubica sugeruje udowodnienie Twierdzenia 4.4. jednak jego dowodu w pracy nie ma. Twierdzenie to zwróciło moją uwagę, ponieważ autor odwołuje się do niego w sformułowaniu Twierdzenia 4.5. oraz w dowodzie Lematu 6.4. na str. 36. Ze zdziwieniem odnotowałem informacje na stronie 47. , że Twierdzenie 4.4. pochodzi z pracy [12] i w domyśle tam właśnie znajdę jego dowód. Uważam, że fakt ten można by zaznaczyć najlepiej zaraz po sformułowaniu twierdzenia. W ważnym dla rozprawy rozdziale siódmym przydałyby się komentarze stwierdzające, które treści rozdziału stanowią wartość intelektualną autora, a co jest zaczerpnięte z innych źródeł.

Problematyka poruszana w rozprawie nie jest powszechnie znana i dlatego napisanie dobrego tekstu wymaga dużej staranności. Rozprawa napisana jest w języku angielskim. W niektórych zdaniach odczuwa się bardziej gramatykę języka polskiego niż angielskiego, a miejscami gramatyki brak. Nie zmienia to faktu, że popieram idee pisania rozpraw doktorskich w języku obcym.

Oczywiście autor nie uniknął całego szeregu błędów tzw. „literówek", które przestałem odnotowywać po przeczytaniu połowy rozprawy. Ponieważ sam potrafię je skorygować, a mam świadomość, że autor rozprawy nie będzie jej ponownie przepisywał z moimi poprawkami, zalecam jedynie ponowne uważne sprawdzenie tej części rozprawy, która będzie przewidziana do ewentualnej publikacji.

Reasumując, stwierdzam, że cele badawcze zakreślone i opisane przez autora we wstępie do rozprawy zostały w pracy zrealizowane. Bibliografia przedmiotu nie jest obszerna, ale w pełni wystarczająca. Autor przedstawił konkretne wyniki w aktualnej i wciąż rozwijającej się tematyce. Uzyskane rezultaty poszerzają naszą wiedzę o możliwościach uzyskiwania ścisłych matematycznie wyników za pomocą metod wspieranych komputerowo i tym samym uzupełniają wcześniejsze badania prowadzone m. in. przez prof. Piotra Zgliczyńskiego.

Uważam, że recenzowana rozprawa doktorska pana mgra Jacka Kubicy spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim, zatem - zgodnie z obowiązującą procedurą - wnoszę o jej dopuszczenie do publicznej obrony.

Marek Izydorek

Gdańsk, dn. 16.05.2024 r.

Prof. dr hab. Marek Izydorek
Wydział FTiMS
Politechnika Gdańska
80-233 Gdańsk
ul. G. Narutowicza 11/12
Email: marek.izydorek(at)pg.edu.pl

Gdańsk, 23 kwietnia 2025 r.

RECENZJA
poprawionej rozprawy doktorskiej mgra Jacka Kubicy
pt. "The Pitchfork bifurcation in the Kuramoto-Sivashinsky PDE."

Rada Dyscypliny Matematyka UJ przyjęła wniosek profesora Wacława Marzantowicza skierowany do Przewodniczącego Komisji Doktorskiej profesora Szymona Peszata, by rozprawa doktorska pana Jacka Kubicy została zwrócona doktorantowi w celu dokonania jej poprawy. Wniosek zawiera dwa argumenty uzupełnione listą uwag dotyczących "tekstu i redakcji rozprawy doktorskiej".

Ze względu na dobro kandydata, w prowadzonym postępowaniu nie może być wątpliwości formalnych i merytorycznych dotyczących treści rozprawy, dlatego zdecydowanie poparłem ten wniosek w głosowaniu.

Nowa wersja rozprawy jest dłuższa od poprzedniej o kilkanaście stron. Autor znacząco rozbudował rozdział wstępny oraz bibliografię. W recenzji poprzedniej wersji rozprawy zwróciłem uwagę na brak wyjaśnień dotyczących roli wymienionych we wstępie zagadnień w dążeniu do uzyskania końcowego rezultatu badawczego. Ponadto zwróciłem uwagę na potrzebę bardziej szczegółowego uzasadnienia znaczenia rozważanej problematyki. W szczególności, jak ta problematyka wpisuje się w szerszy kontekst zagadnień dotyczących obecnie prowadzonych badań wspieranych komputerowo (popularność tego typu badań, wiodące ośrodki na świecie, itp.).

Autor tylko częściowo zaspokoił moją ciekawość w tym zakresie, uzupełniając pracę o rozdział "Overview of rigorious numerics used in this thesis". Jest on o tyle dla mnie interesujący, że sam nie prowadzę badań w oparciu o metody wspierane komputerowo.

Z drugiej strony, dopisany fragment zatytułowany "A brief overwiev of the bifurcation results for the dynamical systems" nie zawiera treści merytorycznych, które mogłyby w sposób istotny podwyższyć jakość rozprawy. Moją intencją nie było sprowokowanie doktoranta do zacytowania kilku twierdzeń z dobrze znanych książek Guckenheimera i Holmesa [7] i Smollera [17], lecz podanie aktualnego stanu wiedzy na temat rozważany przez autora w rozprawie, a tego nadal tam nie znajduję.

W opini wskazywałem na brak precyzyjnych odniesień do wcześniejszych prac, którymi autor motywuje swoje badania, a w szczególności na brak głębszej analizy porównawczej z wynikami uzyskanymi przez promotora doktoratu prof. Piotra Zgliczyńskiego w pracy [23]. Moje uwagi nie byłyby konieczne, gdyby autor we wstępie wymienił te wyniki pracy doktorskiej, które stanowią wyłącznie jego własność intelektualną. Myślę, że w takiej sytuacji problem niecytowanej pracy [12] byłby ważny, ale nie aż tak istotny, by wymagał korekty rozprawy.

W nowej wersji rozprawy autor zmienił kolejność rozdziałów, przenosząc niektóre z nich z części zawierajacej załączniki do części głównej, oraz dokonał kilku korekt natury redakcyjnej (np. zmiana tytułu rozdziału). Nie wpływa to w żaden sposób na zmianę merytorycznej zawartości rozprawy. Dlatego nie będę ponownie opisywał i analizował poszczególnych rozdziałów pracy.

Podtrzymuję opinię wyrażoną w mojej poprzedniej recenzji. Autor recenzowanej pracy doktorskiej przedstawił konkretne wyniki w aktualnej i wciąż rozwijającej się tematyce. Uzyskane rezultaty poszerzają naszą wiedzę o możliwościach uzyskiwania ścisłych matematycznie wyników za pomocą metod wspieranych komputerowo i tym samym uzupełniają wcześniejsze badania prowadzone m. in. przez prof. Piotra Zgliczyńskiego. Wyniki opisne w pracy zostały opublikowane w wieloautorskim artykule [12]. **Uważam, że recenzowana rozprawa doktorska pana mgra Jacka Kubicy spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim, zatem - zgodnie z obowiązującą procedurą - wnoszę o jej dopuszczenie do publicznej obrony.**

Marek Izydorek