Wacław Marzantowicz

Faculty of Mathematics
and Computer Science

Profesor dr hab. Szymon Peszat

Przewodniczący Komisji Doktorskiej

w przewodzie doktorskim magistra Jacka Kubicy

W M I U J

Szanowny Panie Profesorze,

Zwracam się w sprawie powierzonej mi recenzji rozprawy doktorskiej mgr Jacka Kubicy, której opóźnione przygotowanie uzgodniłem w kwietniu z profesorem Piotrem Kalitą. Po wstępnym etapie przygotowania uważam i wnioskuje, żeby w tym wypadku praca ta została zwrócona doktorantowi w celu dokonania jej poprawy w określonym przez komisję terminie (zgodnie z pktem 12 (3) „Zasad przeprowadzania postępowań doktorskich przez Radę Dyscypliny Matematyka UJ w trybie eksternistycznym (aktualizacja z dnia 29 czerwca 2023)".

Argumenty:

1. Tekst rozprawy jest prawie verbatim równy tekstowi wspólnej pracy doktoranta promotora i prof. P. Kality „The pitchfork bifurcation and heteroclinic connections in the Kuramoto–Sivashinsky PDE" dostępnej na stronie repozytorium „arxiv". W samej rozprawie wymieniona powyżej praca nie jest wymieniona. Są, też niewielkie nie wyodrębnione fragmenty nie pochodzące z tamtej pracy, ale wobec powyższego trudno jest je ocenić.
2. Przyjmując fakt, że podstawą rozprawy doktorskiej może być publikacja, czy praca naukowa, w tym wspólna, zwyczajowo uznaje się zasadę, że powinna ona być zaopatrzona w szersze wprowadzenie umiejscawiające ją w perspektywę badań w tej dziedzinie. W przypadku matematyki, oznacza to też podanie definicji i oznaczeń, w taki sposób aby treść rozprawy była możliwie szeroko dostępna, w tym dla niespecjalistów z obszaru badawczego doktoranta i jego grupy. Jest to zresztą zgodne z zapisem punktu 10 wymienionych zasad postępowań doktorskich dotyczącego wymagań egzaminu:
   Doktorant powinien:
   (a) znać wypowiedzi podstawowych definicji i twierdzeń, które dotyczą danego zagadnienia,
   (b) znać przykłady ilustrujące występujące pojęcia (pozytywne i negatywne),
   (c)znać logiczne powiązania pomiędzy odpowiednimi pojęciami i twierdzeniami.

W konkluzji, uważam, że doktorant powinien uzupełnić treść rozprawy o kilkanaście stron zawierających szersze i kompletne wprowadzenie i przedstawić nową jej wersję. Konkretne, ale ogólne uwagi podaję osobno.

Poznań, poniedziałek, 8 lipca 2024

Marzantowicz

Uwagi dotyczące tekstu i redakcji rozprawy doktorskiej magistra Jacka Kubicy „The Pitchfork bifurcation in the Kuramoto-Sivashinsky PDE”.

Sugerowane zagadnienia, które mogłyby być ujęte w dłuższym wprowadzeniu do wyżej wymienionej rozprawy.

1. Pojęcie (definicja) bifurkacji równań różniczkowych:
   a) Warunki konieczne na istnienie bifurkacji w danym punkcie
   b) Różne typy bifurkacji, Warunki dostateczne i różne metody wykazywania istnienia bifurkacji (np. bifurkacja Hopfa -metody topologiczne i punkt osobliwy zbioru rozwiązań (w szczególności użyteczne przy badaniu bifurkacji rozwiązań stacjonarnych!) – metody algebraiczne i analityczne, metody aproksymacyjne i obliczeniowe.
2. Możliwie precyzyjne określenie – definicje przestrzeni funkcyjnych, w których określa się nieskończeniewymiarowy nieliniowy operator, którego rozwiązania odpowiadają rozwiązaniom pierwotnego równania. Opis metod używanych aproksymacyjnych wykorzystywanych rozprawie.
3. Definicje i wyjaśnienia pojęć z matematyki obliczeniowej używanych w pracy takich jak „rigorious proof”, rigorious integral” (versus np. heuristic integral), „rigorious numerics” i innych.
4. Opis ogólny (już we wstępie) różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi w doktoracie a wynikami cytowanej pracy G. Arioli and H. Koch, Computer-assisted methods for the study of stationary solutions in dissipative systems, applied to the Kuramoto-Sivashinski equation, czy wcześniejszych prac promotora na powyższy temat. Jest to też okazja na uwypuklenie różnicy pomiędzy problemem bifurkacji odwzorowań stacjonarnych a odwzorowań okresowych tak jak bada się w innej z cytowanych prac J. Bouwe van den Berg and E. Queirolo, Rigorous validation of a Hopf bifurcation in the Kuramoto–Sivashinsky PDE.
5. Przeniesienie części zawartości dodatku „Appendix”, o charakterze ogólnym do tego wprowadzenia np. paragraf o stopniu topologicznym czy formie normalnej, pozostawiając tam wyłącznie sprawy techniczno-obliczeniowe, odnoszące się tylko do rozumowań zawartych w rozprawie.
6. I na koniec, co nie jest już sugestią zmiany prezentacji wyników, a co mogłoby podnieść jej znaczenie (atrakcyjność), to prośba o ilustrację wykorzystania uzyskanych twierdzeń w konkretnym modelu matematycznym opisywanym przez równanie K-S (o ile doktorant dysponuje takim przykładem).

Poznań, 8 lipca 2024

Marzantowicz

Prof. dr hab. Wacław Marzantowicz
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Adama Mickiewicza w Poznaniu
ul. Uniwersytetu Poznańskiego, 61 - 614 Poznań

e-mail: marzan@amu.edu.pl

tel. (48) (61) 829-5499

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Jacka Kubicy
The Pitchfork bifurcation in the Kuramoto-Sivashinsky PDE

Przedstawiona rozprawa doktorska magistra Jacka Kubicy "The Pitchfork bifurcation in the Kuramoto-Sivashinsky PDE" liczy 84 strony wraz ze spisem treści i napisana jest w języku angielskim.

Poświęcona jest opisowi własności rozwiązań równania Kuramoto-Sivashinskiego

$$u_t = -\mu u_{xxxx} - u_{xx} + (u)^2_x, \quad \mu > 0, \; x \in \mathbb{R}, \; u(t,x) \in \mathbb{R}$$

w pobliżu punktu bifurkacji $(0,1)$ czyli rozwiązań bifurkujących od rozwiązania zerowego przy wartości parametru $\mu = 1$. To równanie różniczkowe, oznaczane w skrócie KS rozpatrywane jest przy warunkach brzegowych okresowości u ze względu na zmienną x, $u(t,x) = u(t, x+2\pi)$ oraz $u(-x,t) = -u(t,-x)$ tj. współzmienniczości u ze względu na naturalne działanie $\mathbb{Z}_2$ na prostej rzeczywistej. Dla parametru $\mu = 1$ spełniony jest warunek konieczny istnienia bifurkacji i rzeczywiście ma ona miejsce a od odwzorowania stacjonarnego $u \equiv 0$ odchodzą dwie gałęzie nietrywialnych rozwiązań skierowane w jednym kierunku względem parametru μ co nadaje tej bifurkacji jej nazwę. Najważniejsze wyniki podane w omawianej rozprawie doktorskiej pochodzą ze wspólnej pracy doktoranta wraz z promotorem i Piotrem Kalitą, która została przyjęta do Journal of Computational Dynamics [12].

Przejdźmy teraz do omówienia treści pracy. Rozpoczyna się ona wstępem, w którym autor informuje o ogólnym schemacie i poszczególnych krokach używanych w badaniu problemu tj. zamiany równania cząstkowego nieskończonym układem równań zwyczajnych poprzez rozwinięcie w szereg Fouriera, a następnie wykorzystanie metody "self-consisted bounds" wprowadzonej w pracy Zgliczyńskiego z Mischaikovem i rozwijanej w innych pracach Zgliczyńskiego, pozwalającej kontrolować błąd w aproksymacji metodą Galerkina.

W pierwszym rozdziale wprowadzającym autor przedstawia krótki przegląd typów twierdzeń o lokalnych bifurkacjach rozwiązań dla problemów z parametrem rzeczywistym, gdy $(0,\mu)$ jest gałęzią rozwiązań. Są to na przykłado: twierdzenie Krasnosielskiego (Thm 0.1), twierdzenie Crandalla-Rabinowitza (Thm 0.4), przykład wykorzystujący schemat redukcji Lapunowa-Schmidta (Thm. 0.6) i jego konsekwencje (Ex. 07). Następnie podaje krótkie informacje na temat twierdzenia Hopfa o bifurkacji, rozmaitości centralnej i rozmaitości stabilnej i niestabilnej w punkcie stacjonarnym układu równań różniczkowych zwyczajnych. Kolejno, dla wygody czytelnika, zawarty jest krótki opis używanych "rigourious numerics methods" tj. badania na ile rozwiązania przybliżone rozchodzą się przy stosowaniu arytmetyki przedziałowej.

Bardzo krótki rozdział pierwszy zawiera defincję różniczkową i własności stopnia topologicznego (Brouwera) sformułowanie podstawowego twierdzenia analizy nieliniowej (Thm 1.1). W rozdziale drugim autor przedstawił definicję i własnośći normy logarytmicznej potrzebnej do oceny odchylenia trajektorii rozwiazania równania różniczkowego wzdłuż krzywej, której pochodna jest małym zaburzeniem pola zadającego to równanie (Lemma 2.3).

Kolejny rozdział trzeci zawiera już bardziej szczegółowy opis pojęć wykorzystywanych w rozprawie doktorskiej. Są to przede wszystkim pojęcia rozwinięte w pracach grupy związanej z promotorem rozprawy jak pojęcie "izolującego kuboidu" w przestrzeni Hilberta (Def. 3.2) będącego specjalnym przypadkiem bloku izolującego dla lokalnych pół-potoków, oraz "warunek stożka" dla takiego kuboidu (Def. 3.8). Więcej miejsca zajmują twierdzenia dotyczące zachowania się trajektorii punktu z rozmaitości stabilnej, odpowiednio niestabilnej, w pobliżu punktu stacjonarnego pół-potoku $\phi_t(..)$ w kuboidzie N, który spełnia silny warunek stożka. Na zakończenie rozdziału wykazane jest twierdzenie (Thm 3.21) stwierdzające, że w ϵ-izolującym kuboidzie N istnieje dokładnie jeden punkt stały lokalnego półpotoku ϕ_t gdy półpotok ten spełnia warunek silnego stożka. Co więcej ten punkt stały jest hiperboliczny.

Rodział czwarty ma charakter "dydaktyczny". Ilustruje się w nim pojęcie bifurkacji typu "pitchfork", a właściwie schematu metody wykorzystywanej później do analizy równania Kuramoto-Sivashinskiego, na przykładach dwóch układów równań różniczkowych zwyczajnych w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ odpowiednio. Wykazuje się dla nich istnienie bifurkacji typu pitchfork i opisuje dynamikę w otoczeniu punktu bifurkacji. Pierwszy dwuwymiarowy model dotyczy przypadku, w którym nie występują kierunki niestabilne (Thm 4.9). Drugi model stanowi modyfikację pierwszego poprzez dopisanie kolejnego (trzeciego) równania wymuszającego kierunek niestabilny (Thm 4.16).

W krótkim rozdziale piątym autor opisuje postać normalną odwzorowania nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta jaką będzie wykorzystywał w rozważaniach późniejszych kluczowych rodziałów rozprawy.

Rozdział szósty jest pierwszym, w którym prezentuje się istotne osiągnięcia uzyskane w rozprawie, w tym wypadku adaptacje, a właściwie specyfikacje metod wprowadzonych w pracach [20], [21],[22], które były inspiracją dla tej rozprawy. Bardziej precyzjnie jest metoda "self consistents bounds". Jest ona przystosowaniem metod badania dyssypatywnych równań różniczkowych cząstkowych do stosowanego w tym podejściu nieskończonego układu równań rózniczkowych zwyczajnych, metody Galerkina i kuboidów izolujących. Pozwala to uzyskać twierdzenia o istnieniu punktów stałych będących atraktorami dla pół-potoków niezmienniczych "w przód". (forward-invariant) czy też twierdzeń o jednoznaczności, oraz o wykładniczej kontroli odchylenia trajektorii tego pól-potoku w zależności od warunków początkowych.

W meritum rozdziału siódmego wkład autora jest jeszcze jest jeszcze bardziej istotny niż w poprzednim rozdziale. Sprawdza się tam warunek stożka w obecności warunku "self consistents bounds". Twierdzenia z tego rozdziału są wykorzystywane w rozdziale ósmym i częściowo są kontynuacją pracy [23] promotora rozprawy.

W rozdziale ósmym Jacek Kubica dowodzi twierdzenia (Thm 8.9), które jest głównym wynikiem jego rozprawy doktorskiej. Twierdzenie to stwierdza istnienie bifurkacji typu "pitchfork" dla parametru $\mu = 1$ w problemie, oznaczonym (46), który otrzymany jest z wyjściowego problemu Kuramoto-Sivashinskiego poprzez standardową redukcję do nieskończonego układu RRZ (ODE) i zamianę zmiennych do odpowiedniej postaci normalnej (Lem. 8.1.). Dowodowi tego twierdzenia poświęcony jest cały podrozdzial 8.2, natomiast dowód istotnego lematu (Lem. 8.1) jest przedstawiony w rozdziale dziesiątym. W tym podrozdziale sformułowanych i udowodnionych jest pięć lematów (Lem. 8.4.-8.8.), które stanowią kolejne kroki w dowodzie Twierdzenia 8.9, a które pozwalają uzasadnić warunki (Pl)-(P3) wymienione w Definicji 4.2. Warunki (Pl)-(P3) opisują dynamikę w ustalonym ϵ-izolującym kuboidzie dla sparametryzowanej rodziny lokalnych pół-potoków w otoczeniu punktu, gdzie ma miejsce bifurkacja typu "pitchfork".

W rozdziale dziewiątym autor przeprowadza kolejny krok w celu analizy lokalnego zachowania się rozwiązań układu (oznaczonego (60)), w pobliżu punktu bifurkacji. Sprawdza się tutaj warunki (założenia) dla dyskutowanego układu pozwalające stosować komputerowo wspomaganą część dowodu, stwierdzić istnienie hiperbolicznych punktów stałych i wyznaczyć możliwie duży zakres parametru $[\lambda_1(\mu_-), \lambda_1(\mu_+]$, w którym ten schemat można stosować. Podsumowujące jest Twierdzenie 9.8, które stwierdza istnienie bifurkacji typu "pitrchfork w przedziale $[\lambda_1(\mu_-), \lambda_1(\mu_+)]$. Dodajmy, że wcześniej autor zmienił parametr μ występujący w oryginalnym ukladzie i pochodzący bezpośrednio z równania KS na $\lambda_1(\mu)$, gdzie $\lambda_1(\mu)$ jest współczynnikiem w liniowej części pierwszego równania układu.

Następny rozdział dziesiąty jest też bardzo ważnym jeśli chodzi o treści będące istotnym wkladem rozprawy w dokładniejszy opis zachowania się rozwiązań równania Kuramoto-Sivashinskiego. Właściwie trudno mówić o rozdziale dziesiątym, gdyż nie można powiedzieć, iż ma on formę jednolitego rodziału. Po prostu od tego momentu kolejne fakty zamieszczone w rozprawie mają numer wiodący 10, a znajdują się tam też "uzupełnienia" (Appendix A), B), C), D)), które zasadniczo stanowią o wartości rozprawy. Dość dużą jego część zajmuje dowód wcześniej sformułowanego Lematu 8.1 o istnieniu odpowiedniej postaci normalnej wielokrotnie wspominanego nieskończonego ukladu równań różniczkowych zwyczajnych. Poprzedzony on jest Dodatkiem A). Sam dowód jak i rozważania Dodatku A) mają charakter analityczny - przeprowadza się w nich szacowania, które uzasadniają zbieżność formalnie zdefiniowanych szeregów określających zamianę zmiennych. Bardzie sumaryczna konkluzja tego rozdziału tj. istnienie heteroklinicznej rodziny łączącej niestabilne rozwiązanie zerowe z niezerowym punktem stacjonarnym będącym atraktorem zawarta jest w twierdzeniu (Thm 10.2). Jednak dopiero przestawione w dodatku (Appendix B) twierdzenia 10.27 i 10.28 zawierające wspomagane komputerowo dowody istnienia bifurkacji typu „pitchfork" dla równania KS z podanym explicite zakresem parametru μ (blisko 1 i odpowiednio $0,25$) stanowią o wartości tego rozdziału i całej rozprawy. W schemacie "rigorous integration" wykorzystywanym tamże autor bazuje na pracy Piotra Zgliczyńskiego [25].

W konsekwencji można stwierdzić, że cele badawcze określone i opisane we wstępie do rozprawy zostały w pracy zrealizowane. Uzyskane rezultaty rozszerzyły stan wiedzy o zachowaniu się gałęzi rozwiązań równania Kuramoto-Sivashinskiego, a także raz jeszcze potwiedziły, że uzyskiwanie matematycznie ścisłych wyników jest możliwe za pomocą metod wspieranych komputerowo.

Podsumowując dorobek rozprawy od strony używanych i wypracowanych technik można powiedzieć, że chciaż w większosci opierają się na klasycznych rozumowaniach analitycznych, to są one skomplikowane ze względu na ich liczbę (mnogość!). Zdecydowanie wymagają cierpliwości ale też zrozumienia schematu ogólnego rozumowania. Jeśli chodzi o dorobek koncepcyjny rozprawy to, jak już stwierdziliśmy opisach, w zasadzie bazuje ona na metodach i schematach wypracowanych wcześniej przez promotora i jego współautorów. Jednak ich specyfikacja i też konkretne, efektywne, obliczenia wykonane na końcu pracy przy użyciu komputera wymagały adaptacji tych metod na poziomie teoretycznym.

W ocenie formalnej strony pracy odniosę się tylko do jej ogólnych cech. Struktura i podział pracy na rozdziały jest naturalny i odwzwierciedla strukturę pracy [12], która jest merytorycznie główną bazą dysertacji. Nawiązuje też do sposobu prezentacji w poprzednich publikacjach promotora rozprawy. Warto zaznaczyć, że długość tekstu i wielość stwierdzeń o czysto technicznych sfomułowaniach czyniły redakcję pracy trudną. Na przykład, w odwołaniach dla skrócenia, zamiast nazw autor używał numerów, a wtedy nietrudno o błąd, albo niejasność. Jednak ogólnie można stronę formalną ocenić pozytywnie. Natomiast mnie osobiście brakuje jakichkolwiek odniesień do fizycznych konsekwencji uzykanych rezultatów. Skoro równanie KS powstało jako model dyfuzji laminarnej (tj. w uwarstwiowanym ośrodku), to przypuszczalnie istnieją możliwe do ilustracji (także wizualnej) konsekwencje fizyczne rezultatów matematycznych przedstawionych w rozprawie.

W podsumowaniu oceny wszystkich wyżej wymienionych aspektów pracy, stwierdzam, że rozprawa doktorska "The Pitchfork bifurcation in the Kuramoto-Sivashinsky PDE" magistra Jacka Kubicy w pełni spełnia wymagania artykułu 187 ustawy z 20 lipca 2018 o Szkolnictwie Wyższym i Nauce, oraz przede wszystkim zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim w środowisku matematycznym.

W konsekwencji wnoszę o dopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Poznań, 24 marca, 2025 roku