dr hab. Jakub Przybyło, prof. AGH
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Kraków, 4 marca 2025 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Sebastiana Babińskiego
Extremal problems on edge colorings of graphs

Tematyka rozprawy mgra Sebastiana Babińskiego obejmuje kilka mniej lub bardziej bezpośrednio spokrewnionych zagadnień dotyczących pewnego rodzaju nasyconych kolorowań krawędzi grafów, digrafów oraz grafów zorientowanych. Przez nasycenie rozumiem tutaj sytuację, w której każda dodatkowa krawędź z przypisanym kolorem z zadanej puli lub dodatkowy zestaw różnokolorowych krawędzi skutkuje pojawieniem się konkretnej zakazanej konfiguracji. Problematyka podjęta przez mgra Babińskiego sytuuje się na pograniczu dwóch istotnych i aktywnie rozwijanych obszarów teorii grafów, o ugruntowanej historii. Pierwszy z nich związany jest z szeroko pojętym zagadnieniem kolorowania grafów, którego korzenie sięgają XIX wieku i badań nad słynną hipotezą (obecnie twierdzeniem) o czterech kolorach, czy np. rezultatów Vizinga o kolorowaniach krawędziowych z lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Drugi wspomniany obszar określić można jako teoria grafów ekstremalnych. Zagadnienia mieszczące się w tym nurcie mają często charakter optymalizacyjny, a typowe problemy dotyczą maksymalizacji lub minimalizacji jakiegoś parametru grafu, jak np. jego rozmiar, przy zadanych ograniczeniach, np. na jego rząd oraz strukturę. Grafy, dla których osiągane są wspomniane skrajne wartości badanego parametru określane są jako ekstremalne. Początki tej problematyki związane są z wynikiem Mantela o grafach bez trójkątów z pierwszej dekady XX wieku, czy późniejszymi uogólnieniami tego rezultatu autorstwa Turána oraz Erdősa i Stone'a z lat czterdziestych, dotyczącymi maksymalnej liczby krawędzi (tj. rozmiaru) grafu o zadanym rzędzie n przy założeniu, że nie zawiera on podgrafu izomorficznego z pewnym grafem H. Warto wspomnieć, iż już te wczesne wyniki implikowały asymptotycznie optymalne rozwiązania badanego problemu w przypadku dowolnego grafu H z liczbą chromatyczną $\chi(H)$ przynajmniej 3. Dla $\chi(H) = 2$ problem pozostaje otwarty – znane są tu wyniki dokładne lub asymptotyczne jedynie dla wybranych grafów i specyficznych podzbiorów grafów dwudzielnych. Rozprawa mgra Babińskiego podejmuje problematykę z nurtu teorii grafów ekstremalnych, lecz w środowisku grafów pokolorowanych krawędziowo, czy, innymi słowy, z uwzględnieniem podziału zbioru krawędzi danego grafu (lub multigrafu) na podzbiory o pewnej strukturze. Takie uogólnienie klasycznych zagadnień oraz związanych z nimi rezultatów nie jest całkowicie nową problematyką. Wskazuje na to szereg odniesień do literatury, wylistowanych w rozprawie, jak i fakt istnienia użytecznych i zaawansowanych narzędzi dedykowanych tej tematyce, takich jak np. wspomniany i wykorzystywany przez mgra Babińskiego *colored graph removal lemma.*

Pierwszy rozdział rozprawy obejmuje podstawowe definicje, oznaczenia i kilka użytecznych narzędzi.

Rozdział 2 zawiera wyniki z artykułu mgra Sebastiana Babińskiego, napisanego wspólnie z promotorem rozprawy doktorskiej, dr. hab. Andrzejem Grzesikiem, dotyczące wysyconych częściowych kolorowań właściwych krawędzi grafów pełnych K_n przy użyciu $\chi'(K_n)$ kolorów. Przez wysycenie rozumiemy tu brak możliwości dokolorowania jakiejkolwiek krawędzi, bez naruszenia wymogu poprawności kolorowania, tj. bez pojawienia się dwóch identycznie

10

pokolorowanych krawędzi incydentnych z tym samym wierzchołkiem – zauważmy, iż takie krawędzie tworzyłyby monochromatyczną ścieżkę długości 2. Zaprezentowane w tym rozdziale rozważania skupiają się nad możliwą liczbą m krawędzi takiego wysyconego grafu. Obejmują one nie tylko typową dla problemów teorii grafów ekstremalnych kwestię granicznych wartości badanego parametru, lecz znacznie ogólniejsze zagadnienie wyznaczenia całego spektrum osiągalnych wartości parametru m, jako funkcji rzędu, n. Problem ten został rozwiązany w całości we wspomnianej współautorskiej pracy mgra Babińskiego. Ściślej rzecz ujmując, w rozprawie zaprezentowane zostały wyniki uzupełniające i dopełniające wcześniejsze rezultaty z artykułu, w którym problem ów został sformułowany w nawiązaniu do klasycznej problematyki uzupełniania kwadratów łacińskich. Należy zaznaczyć, iż przedstawione w rozprawie rezultaty dotyczą w wielu przypadkach kluczowych, w moim przekonaniu, dla finalizacji badań nad tym zagadnieniem wartości parametru m, przynajmniej z punktu widzenia ograniczenia dolnego na jego dopuszczalną wartość. Zastosowana metodologia dowodowa, w bardzo ogólnym ujęciu, bazuje na podstawowych własnościach grafów oraz analizie strukturalnych implikacji posiadania przez nie wysyconych kolorowań. Argumenty wymagały miejscami dosyć drobiazgowej analizy i kilku nietrywialnych obserwacji.

Rozdział 3 dotyczy wielokolorowej wersji problemu Turána dla ścieżki długości 3, będącej grafem dwudzielnym. W przeciwieństwie do zagadnienia z poprzedniego rozdziału, tym razem strukturą, której staramy się uniknąć jest tęczowo pokolorowana kopia takiego grafu, czyli ścieżka, której wszystkie trzy krawędzie mają przypisane parami różne kolory. Dla zadanego rzędu n oraz liczby naturalnej $k \geqslant 3$, rozważania przedstawione w tym rozdziale dotyczą funkcji przypisującej krawędziom grafu pełnego K_n zbiory kolorów będące podzbiorami ustalonego k-elementowego zbioru C w taki sposób, by każdy kolor był przypisany do jak największej liczby krawędzi (tj. maksymalizującej parametr m, równy minimum po wszystkich kolorach $c \in C$ z liczby krawędziowych podzbiorów zawierających c), przy warunku, że nie istnieje żadna ścieżka długości 3 w K_n o tęczowym kolorowaniu z przypisanych jej krawędziom list. Alternatywnie, możemy związać każdy kolor $c \in C$ z grafem indukowanym przez krawędzie zawierające c w przypisanych im zbiorach i starać się zmaksymalizować najmniejszy z rzędów powstałych k grafów (na tym samym zbiorze n wierzchołków). Ten parametr, jak i zagadnienia pokrewne, były badane w kilku innych ciekawych pracach. Rozdział 3 rozprawy zawiera asymptotycznie optymalne rozwiązanie przedstawionego problemu, dotyczącego tęczowych ścieżek długości 3, dla dowolnej liczby kolorów $k \geqslant 3$, co w ogólności było problemem otwartym. Wynik ten został opublikowany w pracy wspólnej z promotorem. Jego dowód wykorzystuje wspomniany *colored graph removal lemma*, który, dzięki pomysłowej obserwacji, umożliwia zamianę rozważanego problemu na zagadnienie istnienia (a właściwie nie-istnienia) pewnych krawędziowo pokolorowanych grafów z wagami na wierzchołkach o stosunkowo prostej strukturze, w których odpowiednio zdefiniowane gęstości wszystkich kolorów przekraczają uprzednio wyznaczone wartości. Uzyskanie wymaganej do domknięcia dowodu sprzeczności opiera się następnie na analizie szeregu zależności pomiędzy wspomnianymi wagami oraz gęstościami i wymaga udowodnienia szeregu nietrywialnych obserwacji. Dowód podzielony jest na 3 przypadki związane z nieco odmiennym zachowaniem kluczowego parametru w badanym zmodyfikowanym zagadnieniu, co ma też bezpośredni związek z odmienną strukturą ważonych grafów ekstremalnych dla poszczególnych przedziałów wartości wskaźnika k, tj. liczby kolorów.

Rozdział 4 dotyczy zagadnienia zbliżonego do tego z rozdziału 3, lecz w przypadku grafów skierowanych. Zamiast ścieżki długości 3, zabronioną strukturą jest tym razem

JU

3-krawędziowy cykl, czyli trójkąt. Analogicznie jak uprzednio, główne wyniki tej części rozprawy dotyczą wielokolorowej wersji problemu Turána dla dwóch możliwych orientacji zabronionego trójkąta. W obu wariantach, w sytuacji, gdy rozważymy ogólny przypadek $k \geqslant 4$ kolorów, rozwiązania problemów okazały się stosunkowo nieskomplikowane (co nie oznacza, iż trywialne). Ich niewątpliwym atutem jest fakt, iż wyznaczone zostały ograniczenia dokładne (nie jedynie asymptotyczne), i to we wzmocnionej wersji tezy, gdzie badamy ograniczenie na sumę krawędzi we wszystkich kolorach, które gwarantuje pojawienie się tęczowego trójkąta, a uzyskana jego wartość, w zestawieniu z odpowiednią konstrukcją, implikuje optymalne ograniczenie na minimalną liczbę krawędzi w każdym z kolorów, gwarantującą pojawienie się zabronionej struktury. Trudniejszy okazał się tym razem przypadek dokładnie 3 kolorów, tj. $k = 3$. Najbardziej rozbudowany argument, inspirowany podejściem z pracy Aharoniego i innych, potrzebny był dla wariantu związanego z trójkątem (jednokierunkowo) skierowanym. Analogicznie jak w poprzednim rozdziale, dowód przeprowadzony jest "nie wprost", gdzie hipotetyczny minimalny kontrprzykład poddany jest złożonej i stopniowo pogłębianej analizie strukturalnej z uwzględnieniem rozkładu kolorów i skierowania krawędzi. Ta drobiazgowa analiza, w pewnym stopniu wspomagana też komputerowo, prowadzi ostatecznie do sprzeczności, co dowodzi prawdziwości pewnej zmodyfikowanej, nieco wzmocnionej wersji badanego warunku. Wspomnieć należy, iż otrzymany rezultat jest tym razem jedynie asymptotycznie optymalny, czego dowodzi odpowiednia konstrukcja pewnej rodziny grafów. Podobny wynik uzyskany jest w przypadku tzw. trójkąta tranzytywnego. Rezultat ten otrzymany jest poprzez stosunkowo łatwą, lecz pomysłową, redukcję do twierdzenia Aharoniego i innych. Rozdział wieńczą rozważania dotyczące grafów zorientowanych. W tym przypadku rozwiązania problemów analogicznych do powyższych okazały się znacznie prostsze. Stanowią one jednak naturalne dopełnieni wcześniejszych rozważań. Wszystkie rezultaty z tego rozdziału są efektem współpracy z dwoma współautorami.

Podsumowując, chciałbym zaznaczyć, iż z przyjemnością zapoznałem sią z treścią przedłożonej rozprawy. Jest ona czytelna i bardzo dobrze zredagowana. Pewien wpływ ma na to zapewne fakt, iż została napisana w języku angielskim, podczas gdy jej trzon stanowią wyniki z trzech współautorskich prac, opublikowanych w renomowanych czasopismach. Zawiera ona bardzo nieliczne, drobne usterki, na tyle nieistotne, iż nie uszczegóławiam uwag dotyczących tychże poniżej. Rozprawa zaopatrzona jest w wyczerpujące i zbalansowane wprowadzenie, dobrze osadzające podjętą tematykę badawczą w szerszym kontekście. Zgodnie z moją wiedzą, wyniki zaprezentowane w rozprawie mgra Babińskiego stanowią rozwiązanie szeregu otwartych problemów naukowych i wniosły oryginalny wkład w rozwój teorii grafów ekstremalnych w kontekście kolorowań krawędziowych. Zaprezentowane dowody są eleganckie, ciekawe i czytelne. Mimo pozornej jednolitości tematycznej, w rozprawie zastosowany jest dosyć szeroki wachlarz zróżnicowanych technik dowodowych, adekwatnie i w sposób zindywidualizowany zaprojektowanych i dopasowanych do każdego problemu z osobna. Jej mocną stroną jest także optymalność (co najmniej asymptotyczna) uzyskanych rozwiązań podjętych problemów. Mimo, iż zaprezentowana rozprawa nie wydaje się na pierwszy rzut oka bardzo obszerna, jest całkiem treściwa i zawiera rozwiązania szeregu interesujących i dobrze umotywowanych problemów, tworząc zgrabną i spójną całość. Jedyna kwestia, która mogłaby zostać w niej doprecyzowana dotyczy wkładu autora w uzyskanie poszczególnych wyników.

W moim przekonaniu przedstawiona rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim, a magistra Sebastiana Babińskiego należy dopuścić do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora w dziedzinie nauk

JP

ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka.

Jakub Przybyło

....
Jakub Przybyło