Recenzja pracy doktorskiej
mgr. Sebastiana Babińskiego
pt. „Extremal problems on edge colorings of graphs"

Rozprawa doktorska mgr. Sebastiana Babińskiego zawiera wyniki badań nad trzema problemami z zakresu teorii grafów ekstremalnych, które dają się sfomułować jako problemy dotyczące pewnych specyficznych kolorowań krawędzi grafu. Dwa z tych problemów są ze sobą ściśle powiązane i stanowią pewne rozszerzenia słynnego problemu Turána. Natomiast trzeci problem mieści się w nieco odrębnej tematyce i dotyczy maksymalnych częściowych właściwych kolorowań grafu pełnego.

Tematyka tej rozprawy wpisuje się w główny nurt współczesnej teorii grafów ekstremalnych. Świadczą o tym między innymi nazwiska wybitnych matematyków badających problemy podjęte w tej pracy doktorskiej. Wyniki zawarte w rozprawie są naturalną kontynuacją niektórych z tych badań. Warto też zauważyć, że rezultaty wchodzące w skład rozprawy zostały już opublikowane w bardzo dobrych czasopismach naukowych z zakresu kombinatoryki: Journal of Graph Theory, SIAM Journal on Discrete Mathematics i European Journal of Combinatorics.

Praca doktorska mgr. Babińskiego składa się ze wstępu i czterech rozdziałów. W krótko, ale zgrabnie napisanym wstępie Autor przedstawia ogólne tło problemów rozważanych w swojej pracy doktorskiej. Przywołuje starsze i nowsze wyniki innych autorów mniej lub bardziej związane z tematyką rozprawy i umiejscawia w tym kontekście wyniki swoich badań. W końcowej części wstępu omawia krótko zawartość pozostałych rozdziałów pracy doktorskiej.

W rozdziale 1 Autor podaje definicje pojęć używanych w rozprawie, a także dwa lematy udowodnione wcześniej przez innych autorów, które są używane w dalszej części pracy. Rozdział ten jest napisany bardzo starannie, co ułatwia czytanie dalszej części pracy.

Rozdział 2 poświęcony jest problemowi maksymalnych częściowych właściwych kolorowań grafu pełnego. Chodzi o to, aby dla ustalonego naturalnego n, rozstrzygnąć dla jakich liczb naturalnych m istnieje maksymalne (tj. nie dające się rozszerzyć) właściwe kolorowanie krawędzi grafu pełnego o n wierzchołkach, w którym pokolorowanych jest dokładnie m krawędzi. Problem ten był wcześniej przedmiotem badań Meszki i Tyniec-Motyki. Autorzy ci znaleźli pewne zakresy wartości m, dla których takie maksymalne kolorowania istnieją, oraz zakresy, dla których nie istnieją. Jednak dla pewnego dość wąskiego przedziału wartości m nie udało im się rozstrzygnąć, czy takie kolorowania są możliwe. Te nierozstrzygnięte przypadki są jednak najtrudniejsze. Tę lukę w wynikach Meszki i Tyniec-Motyki wypełniają właśnie wyniki zawarte w rozdziale 2 omawianej rozprawy. Autor wykazał, że dla wszystkich m, dla których omawiany problem nie był dotąd rozstrzygnięty, maksymalne właściwe kolorowania krawędzi grafu, w którym dokładnie m krawędzi jest pokolorowanych, nie istnieją. Dowód nie wprost polega na dogłębnej analizie struktury grafu indukowanego przez pokolorowane krawędzie, gdyby takie kolorowanie istniało. Jest to dość żmudny dowód, w którym analizuje się sporą liczbę przypadków, przeprowadzony elementarnymi metodami kombinatorycznymi. Wynik zawarty w tym rozdziale nie tylko domyka rozwiązanie omawianego problem, ale także zawiera wyniki Meszki i Tyniec-Motyki w przypadku, gdy maksymalne częściowe właściwe kolorowania nie istnieją.

Wyniki zawarte w rozdziale 3 dotyczą jednej z wersji tzw. tęczowego problemu Turána dla ścieżki o trzech krawędziach. Rozważane są tu grafy, w których każda krawędź jest pokolorowana co najmniej jednym z k kolorów. Mówiąc nieco mniej formalnie, w problemie analizowanym w rozdziale 3 pytamy jaka jest najmniejsza liczba krawędzi każdego koloru w grafie, która gwarantuje istnienie tęczowej ścieżki o trzech krawędziach, czyli ścieżki, w której każda krawędź ma inny kolor. Taki problem był wcześniej badany dla innych grafów niż ścieżka o trzech krawędziach, na przykład został rozwiązany dla trójkąta.

Główny wynik rozdziału 3 to dolne ograniczenie na liczbę krawędzi w każdym kolorze, która gwarantuje istnienie tęczowej ścieżki o trzech krawędziach. W dowodzie tego rezultatu wykorzystana jest wersja Lematu o usuwaniu grafów (ang. Graph removal lemma), która została bardzo niedawno pokazana przez Im, Kim, Lee i Seo w pracy o bardzo podobnej tematyce. Zastosowanie tego lematu znacznie upraszcza asymptotyczne rozumowania i pozwala utożsamić wierzchołki, które mają te same zbiory kolorów incydentnych z nimi krawędzi. W rezultacie oryginalny problem zostaje sprowadzony do problemu na grafie z wagami zdefiniowanymi na wierzchołkach, których liczba jest zależna tylko od liczby użytych kolorów. Dalsza część dowodu polega na pokazywaniu własności domniemanego ekstremalnego kontrprzykładu i prowadzi w końcu do wniosku, że taki kontrprzykład nie istnieje. Ta część dowodu wymagała cierpliwej analizy struktury rozważanego grafu i jest technicznie skomplikowana, szczególnie dla małych k, tj. $3 \leq k \leq 8$. W rozdziale 3 podane są konstrukcje grafów ekstremalnych pokazujące, że otrzymane ograniczenie dolne na liczbę krawędzi każdego koloru gwarantujące istnienie tęczowej ścieżki o trzech krawędziach jest asymptotycznie ściste.

W rozdziale 4 rozważa się podobny problem jak w rozdziale 3, ale dla grafów skierowanych. Autor znajduje mianowicie najmniejszą liczbę krawędzi każdego koloru w kolorowaniach analogicznych do tych rozważanych w rozdziale 3, która gwarantuje istnienie tęczowego skierowanego trójkąta, a także najmniejszą liczbę krawędzi niezbędną do zagwarantowania istnienia tęczowego tranzytywnego trójkąta. W przypadku grafów nieskierowanych problem ten został rozwiązany dla trójkąta przez Keevasha, Mumbayi'a, Sudakova i Verstraëte w 2004 roku dla kolorowań z co najmniej czterema kolorami oraz przez Aharoniego, DeVosa, Gonz'aleza, Montrejlano i Šámala w 2020 roku dla kolorowań trzema kolorami. Ten drugi wynik, jak i metoda użyta do jego udowodnienia są wykorzystane do pokazania rezultatów zawartych w omawianym rozdziale.

Podobnie jak dla trójkątów nieskierowanych, również w przypadku trójkątów skierowanych najtrudniejszy jest przypadek kolorowań trzema kolorami. Ponadto, rozwiązania dla trójkątów tranzytywnych i skierowanych są inne. W tym pierwszym przypadku rozwiązanie jest, w pewnym sensie, takie samo jak w przypadku nieskierowanym i jest dość prostym, choć nietrywialnym, wnioskiem ze wspomnianego wyżej rezultatu Aharoniego i in. dla trójkąta nieskierowanego. Dużo trudniejszy jest przypadek trójkąta skierowanego. Nie tylko rozwiązanie i struktura ekstremalnego grafu skierowanego jest tu inna niż dla trójkąta nieskierowanego, ale i dowód jest bardzo złożony. Dowód ten jest najbardziej technicznie skomplikowanym dowodem w całej pracy doktorskiej. Generalna strategia dowodu pochodzi z pracy Aharoniego i in. i polega na dowodzeniu pewnej dużej liczby nierówności, które muszą spełniać parametry domniemanego kontrprzykładu i pokazaniu na koniec, że układ tych nierówności nie ma rozwiązania. Stopień skomplikowania tego dowodu jest jednak większy niż dowodu Aharoniego i in. dla trójkąta nieskierowanego, ponieważ trzeba rozważyć dużo więcej przypadków. Część z nich jak i samo nie istnienie rozwiązania układu nierówności na końcu dowodu, zostały zweryfikowane przy użyciu komputera.

Wyniki dotyczące większej niż 3 liczby kolorów są dużo łatwiejsze do udowodnienia, ponieważ struktura ekstremalnego grafu jest w tym przypadku dużo prostsza i taka sama jak w przypadku nieskierowanym. Niemniej jednak, szczególnie w przypadku trójkąta skierowanego, dowód wymagał niebanalnych pomysłów. Listę wyników w rozdziale 4 rozprawy dopełnia raczej nietrudny wynik dla grafów zorientowanych, tzn. grafów skierowanych bez cykli 2-krawędziowych. Autor pokazuje mianowicie jaka najmniejsza liczba krawędzi każdego koloru w takim grafie gwarantuje istnienie tęczowego trójkąta tranzytywnego (dla trójkątów skierowanych ten problem jest trywialny).

Przechodząc do oceny całości rozprawy, uważam, że jest to bardzo solidna praca doktorska. Zawiera kilka niełatwych do pokazania rezultatów z zakresu teorii grafów ekstremalnych. Podjęte problemy są dobrze umotywowane wcześniejszymi badaniami i stanowią istotny wkład w teorię rozwijaną przez czołowych badaczy pracujących w tej dziedzinie. Wyniki rozprawy mgr. Babińskiego dają odpowiedzi na naturalne pytania pojawiające się w ramach tej teorii. Autor pracy nie stosuje może jakichś własnych nowatorskich metod, ale skutecznie wykorzystuje istniejące nowoczesne metody. Myślę tu przede wszystkim o wyniku i metodzie z pracy Aharoniego i in., a także o bardzo ładnym zastosowaniu wariantu Lematu o usuwaniu grafów. Kilka z dowodów jest naprawdę bardzo technicznie skomplikowanych i przeprowadzenie ich wymagało wielu nietrywialnych pomysłów.

Dowody twierdzeń są napisane bardzo starannie, szczególnie we fragmentach bardziej technicznych, gdzie kroki rozumowań są dokładnie wyjaśniane. W niektórych momentach dość istotnych dla całego rozumowania przydałyby się jednak nieco bardziej szczegółowe komentarze. Na przykład w miejscu, gdzie w rozdziale 3 definiuje się graf zgrupowany, jego struktura – w szczególności brak wierzchołków pewnych typów – mogłaby zostać dokładniej wyjaśniona. Mam wrażenie, że większość rozprawy została przeklejona z opublikowanych prac, które zawierają wyniki rozprawy. Świadczy o tym na przykład początek rozdziału 4, gdzie nagle pojawia się bez wyjaśnienia oznaczenie c na liczbę kolorów (takie jak w publikacji, która zawiera wyniki z tego rozdziału), podczas gdy w całej pozostałej części pracy tę liczbę oznacza się przez k. Konsekwencją takiego podejścia do redakcji pracy jest to, że zawiera ona pewne skróty myślowe, które są uzasadnione w publikacjach w czasopismach, natomiast nie ma potrzeby robienia takich skrótów w pracy doktorskiej. Jako przykład takiego skrótu niech posłuży ostatni akapit rozdziału 3.2, gdzie Autor mógłby dokładniej wyjaśnić dlaczego dowód Twierdzenia 3.3 dla czterech kolorów wynika z prawdziwości tego twierdzenia dla trzech kolorów. Ta drobna krytyczna uwaga nie wpływa jednak w istotny sposób na moją wysoką ocenę redakcyjnej strony pracy. W sumie pracę czyta się dobrze, w czym na pewno pomaga podawanie w wielu miejscach intuicji kryjących się za prezentowanymi rozumowaniami, co znacznie ułatwia ich śledzenie. Znalazłem w pracy bardzo niewielką liczbę drobnych błędów.

Podsumowując, uważam, że praca doktorska mgr. Sebastiana Babińskiego zdecydowanie spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. W szczególności zawiera oryginalne rozwiązania problemów naukowych. Dlatego z pełnym przekonaniem popieram wniosek o nadanie mgr. Sebastianowi Babińskiemu stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

28 lutego 2025 r.

prof. dr hab. Zbigniew Lonc
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska