

Problemy ekstremalne dotyczące krawędziowych kolorowań grafów

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Sebastian Babiński

Krawędziowe kolorowania grafów i ekstremalna teoria grafów są znanymi obszarami teorii grafów z długą historią. Kluczowe wyniki dotyczące pierwszego z nich należą do Shannona i Vizinga, którzy analizowali indeksy chromatyczne grafów. Jednym z najważniejszych problemów związanych z drugim obszarem jest wyznaczenie liczby Turána grafu F , czyli największej możliwej liczby krawędzi w grafie, który nie zawiera F jako podgrafu. W tym zakresie istotne wyniki należą do Mantela, Turána oraz Erdősa i Stone'a, gdy F jest odpowiednio: trójkątem, grafem pełnym i grafem niedwudzielnym. Celem niniejszej rozprawy jest przedstawienie trzech problemów wywodzących się z połączenia dwóch powyższych gałęzi teorii grafów, czyli problemy ekstremalne dotyczące krawędziowych kolorowań grafów. Każdy z nich ma na celu odpowiedź na pytanie: ile pokolorowanych krawędzi może wystąpić, aby graf spełniał określone warunki, choć wszystkie dotyczą nieco innych sytuacji.

Pierwszy problem związany jest z maksymalnymi kolorowaniami krawędziowymi, które są prawidłowymi kolorowaniami krawędziowymi grafu G rzędu n za pomocą $\chi'(K_n)$ kolorów w taki sposób, by dodanie do G dowolnej krawędzi w dowolnym kolorze sprawiało, że kolorowanie to przestaje być prawidłowe. Meszka i Tyniec-Motyka rozwiązyali częściowo problem ustalenia dla dowolnej liczby wierzchołków i krawędzi istnienia grafu posiadającego maksymalne kolorowanie krawędziowe. W tej części rozprawy rozwiązanie powyższego zagadnienia zostaje w całości uzupełnione.

Kolejne dwie części pracy związane są z kolorowymi problemami Turána. Dla ustalonego zabronionego grafu F rozważamy $c \geq 1$ grafów o wspólnym zbiorze wierzchołków, interpretując każdy z grafów jako krawędzie w innym kolorze, i chcemy ustalić, jaka jest największa możliwa liczba krawędzi w każdym kolorze, przy której nie pojawia się kopia grafu F mająca wszystkie krawędzie w różnych kolorach. Druga część rozprawy dotyczy powyższego problemu, gdy F jest ścieżką o 3 krawędziach. Erdős i Gallai wyznaczyli asymptotycznie optymalne ograniczenie liczby Turána ścieżki o ustalonej długości. W rozprawie zaprezentowany zostaje kolorowy wariant tego wyniku w przypadku ścieżki o 3 krawędziach oraz dowolnej liczby kolorów, a udowodnione ograniczenie jest asymptotycznie optymalne.

Ostatnie zagadnienie rozprawy dotyczy grafów, które nie posiadają tęczowych trójkątów. Aharoni i in. przeanalizowali kolorowy problem Turána dla trójkąta w przypadku nieskierowanym. W niniejszej pracy jest przedstawione rozwiązanie analogicznego problemu dla grafów skierowanych, nieposiadających tęczowych trójkątów skierowanych lub tranzytywnych oraz dla dowolnej ustalonej liczby kolorów. Dodatkowo, został rozwiązany analogiczny problem w przypadku grafów zorientowanych.

6.12.2024

Sebastian Babiński