Prof. Yuri Tomilov
Zakład Analizy Funkcjonalnej
Instytut Matematyczny PAN

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Michała Buchały „Weighted shifts on directed trees and weighted composition operators"

Przedłożona rozprawa dotyczy ważnych problemów w powstałej dość niedawno teorii przesunięć ważonych na grafach skierowanych i, w szczególności, drzewach skierowanych. Przesunięcia ważone stanowią podstawową klasę operatorów, posiadającą rozwiniętą teorię, i występują jako modeli dla innych mniej przejrzystych klas operatorów. Są one niezwykle pożyteczne do konstruowania przykładów ilustrujących wiele istotnych zagadnień teorii operatorów. Do niedawna przesunięcia ważone były rozważane prawie wyłącznie na przestrzeniach typu ℓ^p na $\mathbb{N}$ bądź $\mathbb{Z}$ (lub wariantach tych zbiorów). Sytuacja się zmieniła z powstaniem wpływowej i głębokiej pracy (a raczej małej monografii) Z. Jabłoński, I.B. Jung, J. Stochel, Weighted shifts on directed trees, Mem. Amer. Math. Soc. **216** (2012), no. 1017, gdzie została rozwinięta teoria przesunięć ważonych na drzewach skierowanych, zawierająca klasyczne przesunięcia jako przypadek bardzo szczególny. Takie szerokie i nowatorskie ujęcie doprowadziło do rychłego rozwoju badań w tematyce przesunięć ważonych oraz odnalezienia nowych zjawisk teorio-operatorowych. Przedłożona rozprawa mieści się też w tym nurcie, rozwijając nowe techniki i prezentuje kilka istotnych postępów w teorii ważonych operatorów przesunięcia.

Ponieważ teoria operatorów przesunięcia na grafach nie jest jeszcze powszechnie znana, przytoczę najpierw kilka podstawowych definicji ułatwiających dalsze omówienie treści rozprawy i przybliżenie wyników w niej zawartych. Przez graf skierowany G rozumiana jest para $G = (V, E)$, gdzie V jest co najwyżej przeliczalnym zbiorem, $E \subset V \times V$, a elementy V są wierzchołkami G, zaś elementy E są krawędziami G. Graf skierowany $G_1 = (V_1, E_1)$ nazywamy podgrafem grafu G, jeśli $V_1 \subset V$ oraz $E_1 \subset E \cap (V_1 \times V_1)$.

Dla każdego wierzchołka $v \in V$ można zdefiniować jego stopień wejściowy jako $\deg_{\text{in}} v = \#\{u \in V : (u, v) \in E\}$, stopień wyjściowy jako $\deg_{\text{out}} v = \#\{u \in V : (v, u) \in E\}$, oraz stopień całkowity jako $\deg v = \deg_{\text{in}} v + \deg_{\text{out}} v$. Dla danego wierzchołka $v \in V$ jego sąsiedztwo $\mathrm{Nb}(v)$ określa się przez $\mathrm{Nb}(v) = \{u \in V : (v, u) \in E\}$. Jeśli $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_e)_{e \in E} \subset \mathbb{C}$ spełnia warunek $\sup_{v \in V} \sum_{u \in \mathrm{Nb}(v)} |\lambda(v, u)|^2 < \infty$, to operator $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in L(\ell^2(V))$ zdefiniowany jako

$$S_{\boldsymbol{\lambda}} e_v = \sum_{u \in \mathrm{Nb}(v)} \lambda(v, u) e_u, \qquad v \in V,$$

gdzie $(e_v)_{v \in V}$ jest standardową ortonormalną bazą $\ell^2(V)$, nazywa się przesunięciem ważonym na G z wagami $\boldsymbol{\lambda}$. Operatory postaci $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ są głównymi obiektami badań w rozprawie, Większość badań w tej tematyce skoncentrowana jest na grafach posiadających strukturę drzewa skierowanego, tzn.

takich grafach $G = (V, E)$, że G nie zawiera cykli, dla każdego $v \in V$ zachodzi nierówność $\deg_{\mathrm{in}} v \leq 1$, a ponadto istnieje co najwyżej jeden wierzchołek $\omega \in V$ taki, że $\deg_{\mathrm{in}} \omega = 0$, nazywany korzeniem drzewa G. Ze zbiorem V zwykle stowarzysza się zbiór V° definiowany jako $V \setminus \omega$, gdy G ma korzeń, i V w przypadku przeciwnym.

Przechodząc do szczegółowego omówienia rozprawy zauważę, że mimo jej dość skromnego rozmiaru, jest ona dość bogata w wyniki, które w całości jest ciężko omówić w tej krótkiej recenzji. Zatem skupię się na wybranych rezultatach najbardziej wartościowych z mojego punktu widzenia. Zaznaczę, że rozprawa opiera się na trzech opublikowanych pracach autora: M. Buchała, *Subnormal and completely hyperexpansive completion problem for weighted shifts on directed trees,* J. Math. Anal. Appl. **537** (2024), Art. ID 128285; M. Buchała, *Unitarily equivalent bilateral weighted shifts with operator weights,* Opusc. Math. **44** (2024), 651-672; M. Buchała, *m-isometric composition operators on discrete spaces,* Complex Anal. Oper. Theory **18** (2024), Art. no 158. (Ostatnia praca ukazała się po złożeniu rozprawy.)

Rozprawa doktorska mgra Buchały składa się z wprowadzenia, zawierającego ogólne omówienie rozprawy, pięciu rozdziałów, oraz bibliografii. W pierwszym rozdziale rozprawy autor podaje wiadomości wstępne niezbędne dla zrozumienia treści rozprawy. Mimo, że ten rozdział jest kompletny i ogólnie pomocny, zawarte w nim komentarzy są skąpe, a jego podrozdział dotyczący teorii operatorów jest dość niespójny, co czasami utrudnia poruszanie się po rozprawie i wymaga czytania liniowego. Ten rozdział należałoby nieco rozbudować, ponieważ tematyka rozprawy dotyczy porównywalnie nowego kierunku badań. W rozdziałach drugim i trzecim rozprawy doktorant bada problem uzupełnienia subnormalnego dla przesunięć ważonych dla bardzo naturalnej klasy drzew skierowanych, składającej się z drzew skierowanych z jednym punktem rozgałęzienia.

Ponieważ kontekst uzupełnień subnormalnych przesunięć na drzewach skierowanych wymaga wiele niestandardowych pojęć wydaje się warto jest podać podstawowe definicje, aby oddać sens i wyjaśnić intuicję stojącą za wynikami otrzymanymi w tym rozdziale. Rozważając poddrzewo $T = (V, E)$ drzewa skierowanego $\widetilde{T} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ oraz $\lambda = \{\boldsymbol{\lambda}_v\}_{v \in V^\circ} \subset (0, \infty)$, ciąg $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}} = \{\widetilde{\lambda}_v\}_{v \in \widetilde{V}^\circ} \subset (0, \infty)$ nazywa się *subnormalnym uzupełnieniem* $\boldsymbol{\lambda}$ na $\widetilde{T}$, jeśli $S_{\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}} \in L(\ell^2(\widetilde{V}))$ dla $\boldsymbol{\lambda} \subset \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$ oraz $S_{\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}}$ jest subnormalny. Często też mówi się (m.in. w przedłożonej rozprawie), że przesunięcie ważone $\widetilde{S}_{\boldsymbol{\lambda}}$ na $\widetilde{T}$ z wagami $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}$ jest uzupełnieniem subnormalnym $\boldsymbol{\lambda}$ na $\widetilde{T}$, choć, moim zdaniem, ta terminologia jest dość niefortunna. Problem uzupełnienia subnormalnego dla pary $(T, \widetilde{T})$ polega na znalezieniu koniecznych i wystarczających warunków, jakie musi spełniać układ $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ} \subset (0, \infty)$, aby posiadał on uzupełnienie subnormalne na $\widetilde{T}$. W przypadku klasycznym jednostronnego przesunięcia ważonego przyjmujemy $V = \{0, 1, 2, ..., m\}$, $E = \{(0, 1), ..., (m-1, m)\}$, $E = \emptyset$ dla $m = 0$, oraz $\widetilde{V} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\widetilde{E} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), ...\}$. Ustalając początkowy zestaw wag $(\lambda_0, ..., \lambda_m)$ rozważany problem polega na wyjaśnieniu czy ten zestaw rozszerza się do ciągu wag subnormalnego jednostronnego przesunięcia ważonego (a jeśli tak, to na określeniu takiego uzupełnienia lub uzupełnień).

Podczas, gdy dobrze zrozumianym podejściem, w tym i ogólniejszych przypadkach, jest interpretacja problemu jako problemu przedłużenia pewnego ciągu (np. $(\lambda_0, ..., \lambda_m)$) jako ciągu momentów, poważnym wyzwaniem jest uzyskanie odpowiedzi w apriorycznych terminach danych początkowych.

W tym celu, w rozdziale pierwszym autor bada obcięte zagadnienie momentów na przedziałach $(0, \infty)$ i $(0, 1]$. Są to przedziały niezwarte, wymagające adaptacji idei i technik używanych w przypadku przedziału zwartego i opracowanych przez Kreina i Nudelmana w ich szeroko znanej książce o zagadnieniu momentów Markova. Jako jeden z wniosków, mgr Buchała uzyskuje kryterium skończonego przedłużenia wstecz ciągu momentów oraz w przypadkach szczególnych opisuje strukturę odpowiedniej miary reprezentującej. Rozdział ten jest bardzo ciekawy, ma odrębną wartość dla ogólnej teorii zagadnienia momentów. Zauważę, że w trakcie swoich rozważań autor poprawił pewne usterki w rozumowaniach ze wspomnianej książki Kreina i Nudelmana. Opierając się na wynikach teorio-funkcyjnych z rozdziału drugiego, mgr Buchała w rozdziale trzecim rozwiązuje problem uzupełnienia subnormalnego dla przesunięć ważonych na drzewach skierowanych z jednym punktem rozgałęzienia i skończonym pniu („trunk”). Choć uzyskane kryterium uzupełnienia jest dość techniczne i zawiłe, jego sformułowanie istotnie zawiera tylko dane początkowe, a zatem jest pożyteczne i wartościowe. Ponadto, autorowi udaje się powiązać przypadki skończonego i nieskończonego pnia, udowadniając, z grubsza, że przesunięcie $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ jest rozwiązaniem w przypadku nieskończonym, gdy istnieje ciąg przesunięć $(S_{\boldsymbol{\lambda}_k})_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że $S_{\boldsymbol{\lambda}_k}$ rozwiązuje problem dla pnia o długości k dla każdego k oraz $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|S_{\lambda_k}\| < \infty$. W ten sposób autorowi udaje się uzyskać również rozwiązanie podobnego zagadnienia dla hyperrozciągających przesunięć $S_{\boldsymbol{\lambda}}$, będących w pewnym sensie obiektem dualnym do przesunięć subnormalnych. Wyniki rozdziału trzeciego uogólniają i wzmacniają rezultaty dwóch wcześniejszych prac autorstwa Exnera, Junga, Stochela, i Yuna, i opublikowanych w Int. Eq. Operator Theory, 2018 i 2020.

Metody teorii przesunięć ważonych na grafach okazały się bardzo pożyteczne w badaniu operatorów kompozycji $C_T f = f \circ T$ na $L^2(X, \mu)$, generowanych przez odwzorowania $T : (X, \mu) \to (X, \mu)$ dyskretnej (a więc co najwyżej przeliczalnej) przestrzeni z miarą (X, μ) takie, że $h_T = \frac{d(\mu \circ T^{-1})}{d\mu} \in L^\infty(X, \mu)$, a zatem $C_T \in L(L^2(X, \mu))$. Przykład tego dostarcza rozdział czwarty rozprawy, gdzie doktorant wyjaśnia strukturę m-izometrycznhych operatorów C_T. Oprócz wartości per se w teorii operatorów, operatory kompozycji są standardowym obiektem teorii ergodycznej i dynamiki liniowej na przestrzeniach nieskończenie wymiarowych, a wiele ich własności, w szczególności, m-izometryczność i jej uogólnienia, nie są jeszcze zbadane w wystarczającym stopniu. Przypomnijmy, że dla danego $m \in \mathbb{N}$ ogranicozny operator liniowy T na przestrzeni Hilberta nazywany jest m-izometrycznym jeśli $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} T^{*k} T^k = 0$. Będąc uogólnieniem operatorów izometrycznych, operatory m-izometryczne zostały wprowadzone w pracach Aglera i Stankusa z początku lat 1990-tych, i od tego czasu cieszą się dużym zainteresowaniem. Operatory m-izometryczne pojawiają się w sposób naturalny w badaniach przesunięć na przestrzeniach funkcji holomorficznych w kole jednostkowym, i pomagają tworzyć jednolite podejście do opisu natury takich przestrzeni. Autor konstruuje najpierw przesunięcie warzone unitarnie równoważne C_T. W tym celu rozważa on graf (skierowany) $G_T = (V_T, E_T)$, gdzie $V_T = X$ oraz $E_T = T^{-1} = \{(Tx, x) : x \in X\}$, oraz definiuje ciąg wag $\boldsymbol{\lambda}_T = (\lambda_e)_{e \in E_T}$ jako $\lambda_{(u,v)} = \sqrt{\frac{\mu(v)}{\mu(u)}}$, dla wszystkich $u, v \in V_T$ z $(u, v) \in E_T$. Z założenia na h_T wynika, że operator przesunięcia ważonego $S_{\boldsymbol{\lambda}_T} \in B(\ell^2(V_T))$ określony jako

$$S_{\boldsymbol{\lambda}_T} e_u = \sum_{v \in V_T, (u,v) \in E_T} \lambda_{(u,v)} e_v, \qquad u \in V_T,$$

jest dobrze zdefiniowany, a unitarna równoważność do C_T jest bardzo łatwa do sprawdzenia. Otwiera to drogę do badania C_T metodami wypracowanymi w teorii przesunięć ważonych na grafach i, w szczególności, drzewach. Zakładając, że G_T jest spójny i nie jest drzewem skierowanym bez korzenia, mgr Buchała otrzymuje przejrzysty opis geometryczny G_T i koncentruje się na operatorach kompozycji odpowiadającym takim T. Centralnym wynikiem tego rozdziału jest charakteryzacja m-izometrycznych S_{λ_T} wyrażona apriorycznych terminach geometrii G_T oraz pewnych wielomianowych reprezentacji $\|S^n_{\boldsymbol{\lambda}_T} e_v\|, n \in \mathbb{N}$, gdzie e_v są wektorami bazowymi w $\ell^2(V_T)$. Opis ten prowadzi do kilku znaczących wniosków. Między innymi, autor opisuje izometryczne operatory C_T, pokazując, że takie operatory muszą być unitarne, a przestrzeń $\ell^2(V_T)$ - skończenie wymiarowa. Ponadto, pokazuje on, że klasy 2-izometrycznych oraz całkowicie hyperrozciągających operatorów kompozycji C_T pokrywają się ze sobą, oraz, przy dodatkowych założeniach na geometrię G_T, otrzymuje szczegółowy opis 3-izometrii. Rozwinięte podejście ma szeroki zasięg, i mgr Buchała stosuje je również do uzyskania kryterium subnormalności operatorów $C_T(C_T^* C_T)^{-1}$, dualnych w sensie Cauchy'ego do 2-izometrycznych operatorów C_T, podając nowe przykłady takich operatorów dualnych które nie są operatorami subnormalnymi. Pojęcie operatorów dualnych w sensie Cauchy'ego zostało wprowadzone przez Shimorina na początku tego wieku i okazało się użyteczne w przeniesieniu własności izometrii na szersze klasy operatorów, działających przeważnie w przestrzeniach funkcji holomorficznych, oraz konstruowaniu modeli funkcyjnych operatorów. Zatem otrzymane wyniki o operatorach dualnych są dobrze umotywowane i mają nieprzeciętny ciężar gatunkowy. Rezultaty tego rozdziału uogólniają i precyzują podobne rezultaty Jabłońskiego i Koszmidera, Int. Eq. Operator Theory, 2021, uzyskane przy istotnie mocniejszych założeniach.

Piąty rozdział rozprawy poświęcony jest badaniu unitarnej równoważności przesunięć z wagami operatorowymi na przestrzeniach wektorowych ℓ^2. Ponieważ przesunięcia ważone na drzewach skierowanych mogą być realizowane jako „zwykłe" przesunięcia z wagami operatorowymi, badania te wpisują się w sposób naturalny w główny nurt rozprawy, chociaż ten wątek nie jest w niej rozwinięty. Autor uzyskuje ogólną charakteryzację unitarnej równoważności przesunięć z wagami kwazi-odwracalnymi (tj. posiadającymi trywialne jądro i gęsty obraz), wyrażoną w terminach rozkładów biegunowych tych wag. Otrzymana charakteryzacja ma dość niejawny charakter i jest trudna do zastosowania, choć pozwala wyprowadzić kilka wcześniejszych wyników. Zatem mgr Buchała podaje jej bardziej przejrzyste wersję w przypadkach, gdy wagi są podwójnie przemienne („doubly commuting") lub normalne, przemienne i odwracalne. W ostatnim przypadku uzyskana charakteryzacja przyjmuje szczególnie dokładną postać. Kilka twierdzeń tego rozdziału dotyczy struktury operatorów unitarnych realizujących unitarną równoważność. Między innymi, gdy wagi są dodatnimi, przemiennymi operatorami w $\mathbb{C}^2$ posiadającymi dwie różne wartości własne, autor wykazuje, że taki operator unitarny posiada co najwyżej dwie główne przekątne różne od zera. Wyprowadza on też kilka interesujących warunków koniecznych unitarnej równoważności przesunięć z wagami operatorowymi (przy założeniu kwazi-odwracalności wag). Wyniki przedstawione w tym rozdziale są niebanalne, ale dość wąskie i wymagają dalszych rozważań, doprecyzowań oraz analizy dla naturalnych klas wag operatorowych.

Rozprawa jest dobrze zredagowana, a jej struktura jest naturalna i przemyślana. Nie zauważyłem istotnych mankamentów matematycznych. Po przejrzeniu większości dowodów, żaden z nich nie wzbudził moich zastrzeżeń, a wszystkie rozumowania były klarowne i szczegółowo rozbudowane.

W tak zaawansowanym technicznie tekście rozprawy doktorant nie ustrzegł się jednak drobnych usterek. Przykładowo, na str 7, lin. 7, powinno być „$\mathcal{T}$" zamiast „T"; na str. 8, lin. -4, z powodu niefortunnego przeoczenia, widmo operatora T zostało zdefiniowane jako zbiór jego punktów regularnych; na str. 16, lin. -13, powinno być „$u(t)$" zamiast „u"; na str 40, lin. 6, powinno byc „$(S_{\boldsymbol{\lambda}_{k'}})_{k=1}^{\infty}$" zamiast „$(S_{\boldsymbol{\lambda}_{k'}})_{k=0}^{\infty}$", a na str. 52 w Theorem 4.14 powinno być „$\cdots \in \mathbf{B}(\ell^2(V_T))$" zamiast „$\cdots \in \ell^2(V_T)$". Czasami rozprawa używa pojęć i notacji wprowadzonych w jej dość odległym miejscu, zazwyczaj w Preliminaries, bez odpowiedniego przypomnienia lub wyjaśnienia. Na przykład na str. 48, w Lemma 4.6, po raz pierwszy pojawia się notacja $\mathcal{C}_T$ dla operatora, który został zdefiniowany na początku rozprawy na str. 7. Podobnie, w rozprawie wspomina się pojęcie „trunk", które, jak się wydaje, nie jest wyjaśnione ani nawet zdefiniowane. Czytanie i zrozumienie rozprawy ułatwiłoby bardziej systematyczne i szczegółowe przedstawienie pojęć używanych w rozumowaniach. Rozdział 1.3 w „Preliminaries" ma niestety formę (w miarę obszernego) formalnego zestawienia definicji i twierdzeń, które nie są ze sobą powiązane tematycznie. Komentarze w tym rozdziale są bardzo skąpe lub jest ich brak, a odniesienia do dalszych rozumowań istotnie by pomogły w orientacji w tekście, który jest nasycony dość niestandardową terminologią. Wypadałoby też poświęcić więcej uwagi omówieniu miejsca otrzymanych wyników wśród podobnych lub pokrewnych rezultatów. Te drobne niedociągnięcia w żaden sposób nie wpływają na moją wysoką ocenę rozprawy.

Konkluzja: Recenzowana rozprawa doktorska jest na wysokim poziomie merytorycznym i stanowi istotny wkład w rozwój teorii operatorów, co zostało potwierdzone szeregiem prac opublikowanych w przyzwoitych czasopismach naukowych. Wyniki zawarte w rozprawie są oryginalne, wzmacniają szereg wcześniejszych niebanalnych rezultatów, a ich część oparta jest na pomysłowych dowodach. Autor wykazał się nieprzeciętnym warsztatem, łączącym techniki teorii funkcji z nowoczesnymi metodami teorii operatorów, które wymagały rozwinięcia na potrzeby badanych zagadnień. Uważam, że recenzowana rozprawa z naddatkiem spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Zatem, z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie mgra Michała Buchały do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Signature Not Verified
Dokument podpisany przez
Yuriy Tomilov
Data: 2025.03.25 02:41:52 CET