Poznań, 26 sierpnia 2024

prof. dr hab. Mieczysław Mastyło
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza

Ocena rozprawy doktorskiej mgra Michała Buchały
„Weighted shifts on directed trees and weighted composition operators"

Rozprawa doktorska Pana mgra Michała Buchały, której promotorem jest prof. UJ dr. hab. Zenon Jabłoński, poświęcona jest badaniu operatorów przesunięć ważonych na drzewach skierowanych oraz operatorów kompozycji na przestrzeniach Hilberta. Podstawy teorii operatorów przesunięć ważonych na drzewach skierowanych są świetnie zaprezentowane w obszernej pracy [29] opublikowanej w Memoirs 216(2012) (współautorzy: Z. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel). Rozprawa napisana w języku angielskim składa się ze wstępu oraz pięciu rozdziałów.

Rozdział pierwszy zawiera podstawowe definicje z teorii grafów i teorii miary. Istotny w tym rozdziale jest podrozdział 1.3 związany z teorią operatorów na przestrzeniach Hilberta, w którym podane są kluczowe definicje oraz niektóre znane wyniki o charakteryzacji pewnych ważnych rodzin operatorów na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ rozważanych w rozprawie. Wśród nich, to rodziny operatorów subnormalnych $T \in L(\mathcal{H})$ (tzn., że T ma rozszerzenia normalne do większej przestrzeni Hilberta), całkowicie hiperekspansywnych $\big($tzn., że $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}T^{*k}T^k \leq 0,\, n \geq 1\big)$ i m-izometrii $\big($tzn., że $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}T^{*k}T^k = 0,\, m \geq 1\big)$.

W rozdziale drugim rozprawy badane są problemy dotyczące momentów na $(0,\infty)$ i $(0,1]$. Autor wprowadza istotne definicje i cytuje pewne wyniki znane w literaturze. Kluczowymi pojęciami tutaj są *ciąg momentów* oraz *ciąg dodatni.* Ciąg (rzeczywisty) $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ nazywa się ciągiem momentów na przedziale $I \subset \mathbb{R}$, jeśli istnieje taka miara borelowska μ na I, której nośnik $\operatorname{supp}\mu$ jest zawarty w pewnym przedziale $[a,b] \subset I$ i ponadto spełnia warunek $s_k = \int_I t^k\, d\mu(t)$ $(0 \leq k \leq n)$. Zbiór wszystkich takich miar μ oznaczamy $\mathcal{M}_I(\mathbf{s})$. Jeśli istnieje jedyna miara $\mu \in \mathcal{M}_I(\mathbf{s})$, to $\mathbf{s}$ nazywa się zdeterminowanym na I. Dla ciągu momentów $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ zdefiniowany jest indeks $\operatorname{ind}_I(\mathbf{s}) := \sup_{\mu\in\mathcal{M}(\mathbf{s})} \operatorname{ind}_I(\mu)$, gdzie $\operatorname{ind}_I(\mu) := \sum_{c\in I} \varepsilon_I(c)\chi_{\operatorname{supp}\mu}(c)$, gdy $\operatorname{supp}\mu$ jest skończony i $\operatorname{ind}_I(\mu) := \infty$ w przeciwnym przypadku. Tutaj $\varepsilon_I := \chi_{\operatorname{int} I} + \frac{1}{2}\chi_{(\operatorname{int} I)'}$. Ciąg $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ nazywa się dodatni (odp. ściśle dodatni) na przedziale $I \subset \mathbb{R}$, jeśli istnieje taki właściwy przedział $[a,b] \subset I$, że dla dowolnego wielomianu $p \in \mathbb{R}_n[x]$ nieujemnego na $[a,b]$ zachodzi $\sigma_n(p) \geq 0$ (odp. $\sigma_n(p) > 0$). Tutaj $\sigma_n \colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ oznacza funkcjonał liniowy określony wzorem $\sigma_n(x^k) := s_k$ dla $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Stosując pewne metody zawarte w monografii w monografii M. G. Kreina i A. A. Nudelmana [33] o charakteryzacji ciągów momentów na zwartych przedziałach mgr Buchała modyfikuje oryginalny dowód z tej monografii, który zawiera pewną nieścisłość dotyczącą odpowiedniego ciągu Czebyszewa. Głównym rezultatem rozdziału 2 jest Twierdzenie 2.13, które stwierdza, że dla ciągu dodatniego $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_n) \subset [0, \infty)$ na I, gdzie $I = (0, \infty)$ lub $I = (0, 1]$ następujące warunki są równoważne: (i) $\mathbf{s}$ jest ściśle dodatni na (I); (ii) $\mathrm{ind}_I(\mathbf{s}) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, gdy $I = (0, \infty)$ i $\mathrm{ind}_I(\mathbf{s}) = \frac{n+1}{2}$, gdy $I = (0, 1]$; (iii) $\mathbf{s}$ nie jest zdeterminowany na I. W rozdziale 2 badane są również wsteczne rozszerzenia ciągów dodatnich $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \subset [0, \infty)$ na $I = (0, \infty)$ odp. $I = (0, 1]$, tzn. takich ciągów $\mathbf{s}' := (s_{-k}, \dots, s_{-1}, s_0, \dots, s_n)$, że $\mathbf{s}'$ jest dodatni na I, gdzie $s_{-k}, \dots, s_{-1} \in [0, \infty)$. Tutaj na uwagę zasługuje Twierdzenie 2.19 o charakteryzacji wstecznych rozszerzeń ciągów ściśle dodatnich za pomocą funkcji $\mathbf{t}_\infty$ związanej z miarami reprezentującymi ciąg $\mathbf{s}$. Funkcja ta jest określona wzorem $\mathbf{t}_\infty(\mathbf{s}) := \inf_{0<a<b} \mathbf{t}_{[a,b]}(\mathbf{s})$, gdzie $\mathbf{t}_{[a,b]}(\mathbf{s}) := \inf \left\{ \int_{[a,b]} \frac{1}{t}\, d\mu(t) : \mu \in \mathcal{M}_{[a,b]}(\mathbf{s}) \right\}$ dla $0 < a < b < \infty$. Stosując ten rezultat mgr Buchała dowodzi interesujące Twierdzenie 2.24, w którym podaje warunki na dodatni ciąg $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \subset [0, \infty)$ i ciąg $(s_{-r}, \dots, s_n)$ $(r \geq 1)$ na to, aby m.in., ciąg $\mathbf{s}' = (s_{-r}, \dots, s_n)$ był wstecznym rozszerzeniem $\mathbf{s}$ na $I = (0, \infty)$.

Podobają mi się rezultaty zawarte w rozdziale 3 związane z badaniem własności klasy operatorów na przestrzeniach Hilberta generowane przez odpowiednie grafy. Badania te dotyczą analizy subnormalnych oraz całkowicie hiperekspansywnych uzupełnień operatorów zwanych przesunięciami ważonymi na drzewach skierowanych. Operatory te są uogólnieniami klasycznych przesunięć ważonych. Dla kompletności przypomnijmy, że jeśli $G = (V, E)$ jest drzewem skierowanym, $\mathrm{Nb}(v) = \{u \in V : (v, u) \in E\}$ oznacza otoczenie $v \in V$ i ciąg skalarów $\lambda = (\lambda_e)_{e \in E}$ spełnia warunek $\sup_{v \in V} \sum_{u \in \mathrm{Nb}(v)} |\lambda_{(v,u)}|^2 < \infty$, to przesunięciem ważonym z wagą λ nazywa się operator ograniczony S_λ na przestrzeni Hilberta $\ell^2(V)$ zdefiniowany dla dowolnego $v \in V$ wzorem $S_\lambda e_v := \sum_{u \in \mathrm{Nb}(v)} \lambda_{(v,u)} e_u$, gdzie $(e_v)_{v \in V}$ jest standardową ortonormalną bazą w $\ell^2(V)$.

Wyniki z rozdziału 2 mgr Buchała zastosował w rozdziale 3 do rozwiązania wspomnianego problemu subnormalnych (odp. całkowicie hiperekspansywnych) uzupełnień p-generacji przesunięć ważonych na drzewach skierowanych $\mathcal{T}_{\eta,\kappa} := (V_{\eta,\kappa}, E_{\eta,\kappa})$ zdefiniowanych w podrozdziale 1.1. Jednym z głównych rezultatów tego rozdziału jest technicznie złożone Twierdzenie 3.3 (w przypadku, gdy $\kappa \in \mathbb{Z}_+$) oraz Twierdzenie 3.9. Ogólnie rzecz biorąc, charakteryzacja opisana jest w terminach ciągu λ oraz ciągu reprezentujących miar Borela na $(0, \infty)$ zależnym od λ. Istnienie wspomnianego ciągu miar w dowodzie Twierdzenia 3.3 (odp. Twierdzenia 3.9) opiera się na Lemacie 3.2 z pracy [20] (odp. Lemacie 3.9 z pracy [37]).

W rozdziale czwartym rozprawy badana jest m-izometryczność operatora kompozycji C_T na przestrzeni Hilberta $\ell^2(X); = L^2(X, \mu)$, gdzie $\mathrm{card}(X) \leq \aleph_0$, μ jest miarą liczącą i $T\colon X \to X$ takim odwzorowaniem, że graf $G_T = (V_T, E_T) := (X, E_T)$ ze zbiorem wierzchołków $E_T := \{(x, Tx) : x \in X\}$ ma nietrywialną silnie połączoną składową (jest to równoważne z warunkiem (ii) w Twierdzeniu 4.5) i funkcja $X \ni x \mapsto h_T(x) := \mu(T^{-1}\{x\})) / \mu(\{x\})$ jest ograniczona. W tym celu w podrozdziale 4.1 rozprawy mgr Buchała dokonuje analizy grafu G_T i uzasadnia, że jeśli $\lambda_T = (\lambda_{(u,v)})_{(u,v) \in E_T}$, gdzie $\lambda_{(u,v)} := \sqrt{\mu(\{v\})} / \sqrt{\mu(\{u\})}$ dla $(u, v) \in E_T$, to przesunięcie ważone S_{λ_T} jest operatorem ograniczonym na $\ell^2(V_T)$. Ponadto stwierdza (Lemat 4.2), że operatory C_T i S_{λ_T} są unitarnie równoważne. Główny wynik uzyskany w podrozdziale 4.2, to ciekawe Twierdzenie 4.14 o charakteryzacji przesunięć ważonych S_{λ_T} na spójnym grafie G_T, które są m-izometriami dla $m \geq 2$. Stosując wspomniany główny wynik, mgr Buchała podaje inny dowód (Twierdzenie 4.15) rezultatu z pracy [31], który głosi, że operator $S_{\lambda_T} \in L(\ell^2(V_T))$ jest 2-izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowicie hiperekspansywny.

W ostatnim piątym rozdziale mgr Buchała dowodzi Twierdzenie 5.1, które podaje charakteryzację unitarnej równoważności dwustronnych przesunięć ważonych z wagami generowanymi przez ciągi jednostajnie ograniczonych ciągów quasi-odwracalnych operatorów na przestrzeni Hilberta.

Uzyskany rezultat jest istotnym uogólnieniem pewnych wyników uzyskanych przez A. Lamberta (1971) oraz J. Kośmidera (2019). Ze względu na złożoność opisu pominiemy detale. Zwrócę uwagę, że dowód tego twierdzenia jest dosyć złożony i nietrywialny. Twierdzenia 5.1 zostało zastosowane w podrozdziale 5.2 do badania dwustronnych przesunięć z dodatnimi wagami. Autor dowodzi, że jeśli wagi są dwuwymiarowe, to przy pewnych założeniach równoważność unitarna może być opisana przez operator unitarny mający co najwyżej dwie niezerowe przekątne.

Problematyka badawcza rozprawy doktorskiej mgra Michała Buchały jest dobrze umotywowana. Operatory przesunięć ważonych na drzewach skierowanych będące uogólnieniami klasycznych operatorów, jak również operatory kompozycji stanowią ważną klasę operatorów na przestrzeniach Hilberta. Teoria tych operatorów jest nadal rozwijana. Dobrze wiadomo, że ważone operatory kompozycji znalazły ważne zastosowania również w teorii operatorów na przestrzeniach Banacha. Warto odnotować, że operatory te były intensywnie badane w związku ze słynnym problemem istnienia nietrywialnych podprzestrzeni niezmienniczych dla operatorów na nieskończenie wymiarowych ośrodkowych przestrzeniach Hilberta. Rozprawa doktorska jest bardzo dobrze zredagowana. Zaprezentowany materiał w pięciu rozdziałach przedstawiony został jasno i zrozumiale. W rozprawie znajdują się nieliczne drobne usterki natury typograficznej. Autor umiejętnie prezentuje istotę zagadnień i jest bardzo dobrze zorientowany w literaturze. Analiza rozprawy była istotnie ułatwiona w związku z prezentacją pewnych znanych ogólnych wyników związanych z tematyką badawczą rozprawy. Autor rozprawy uzyskane wyniki buduje na bardzo dobrej znajomości wcześniej znanych rezultatów. Bazując na pewnych metodach ze wspomnianej na wstępie pracy [31] oraz innych mgr Buchała wnosi wartościowy wkład, uogólniając pewne wyniki (wspomniane powyżej) innych autorów. Dowodzi nowe rezultaty o charakteryzacji wspomnianych rodzin operatorów. Dowody niektórych twierdzeń są technicznie złożone, jednak ich prezentacja jest solidna. W skład rozprawy wchodzą rezultaty zawarte w trzech samodzielnych pracach [10, 11, 12]. Artykuł [11] został opublikowany w J. Math. Anal. Appl. (2024), natomiast [12] w Opuscula Mathematica. Praca [10] jest dostępna pod adresem https://arxiv/abs/2209.08518. Reasumując, stwierdzam, że rozprawa zawiera wyniki na dobrym poziomie naukowym i stanowi wartościowy wkład w zakresie aktualnej tematyki badawczej.

Uważam, że rozprawa doktorska mgra Michała Buchały spełnia wymagania określone w Ustawie o stopniach i tytule naukowym. Wnoszę wobec tego o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie mgra Buchały do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

M. Mastyło