Warszawa, 3 marca 2025

dr hab. Tomasz Kochanek
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Recenzja rozprawy doktorskiej
pana mgr Michała Buchały

pt. *Weighted shifts on directed trees and weighted composition operators*

1. Tematyka rozprawy doktorskiej

Rozprawa doktorska pana mgr. Michała Buchały została napisana pod kierunkiem pana dra hab. prof. UJ. Zenona Jabłońskiego i dotyczy szeregu istotnych i naturalnych pytań związanych głównie z ważonymi operatorami przesunięcia (o operatorowych wagach) działających na przestrzeniach Hilberta. Szczególnie wyróżnione są tu przestrzenie Hilberta $\ell_2(V)$ złożone z sumowalnych z kwadratem ciągów indeksowanych wierzchołkami pewnego drzewa skierowanego V. Autor bada w swojej rozprawie takie zagadnienia jak: problem uzupełnienia dla ważonych operatorów przesunięcia na drzewach skierowanych, w szczególności uzupełnienia subnormalne i całkowicie hiperekspansywne, charakteryzacja m-izometryczności operatorów złożenia na przestrzeniach z miarą dyskretną, jak również opis unitarnej równoważności dwustronnych operatorów przesunięcia z operatorowymi wagami. Kluczową rolę w rozprawie odgrywają również pewne nowe i interesujące wyniki dotyczące rozszerzania obciętych ciągów momentów na przedziałach niezwartych $(0,\infty)$ i $(0,1]$, co stanowi rozszerzenie wcześniejszych klasycznych twierdzeń Kreina i Nudel'mana.

Rozprawa składa się ze wstępu, rozdziału zawierającego niezbędne techniczne preliminaria, oraz czterech rozdziałów zawierających zasadniczą treść rozprawy i nowe wyniki Autora. Wyniki opisane w rozdziałach 2–5 rozprawy oparte są na trzech pracach Doktoranta. Wszystkie z nich są jednoautorskie i zostały opublikowane w dobrych czasopismach. Nie licząc kilku usterek i drobnych uwag redakcyjnych, które wymienię w dalszej części tekstu, rozprawa napisana jest bardzo starannie i świadczy o dużej kulturze matematycznej Autora. Uzyskane wyniki wymagały ponadto zastosowania wielu pomysłowych argumentów i połączenia metod wywodzących się z teorii operatorów, algebry liniowej, czy teorii miary.

2. Główne tezy i ocena rozprawy

Rozdziały drugi i trzeci rozprawy zawierają wyniki opublikowane w artykule

[B1] M. Buchała, *Subnormal and completely hyperexpansive completion problem for weighted shifts on directed trees*, J. Math. Anal. Appl. **537** (2024), paper no. 128285.

tk

Autor rozważa najpierw problem rozszerzania obciętych ciągów momentów na pewnych podprzedziałach prostej, opisując dość szczegółowo w sekcji 2.1 metody wypracowane przez Kreina i Nudel'mana, które pozwalają m.in. scharakteryzować ciągi momentów $\mathbf{s} = (s_0, \ldots, s_n)$ względem miar borelowskich na zwartych przedziałach $I \subset \mathbb{R}$ przez warunek dodatniości rozumiany w ten sposób, że dla pewnego przedziału $[a, b] \subset I$ i dowolnego wielomianu $p \in \mathbb{R}_n[x]$ nieujemnego na $[a, b]$ mamy $\sigma_{\mathbf{s}}(p) \geqslant 0$, gdzie $\sigma_{\mathbf{s}}$ jest funkcjonałem liniowym na $\mathbb{R}_n[x]$ określonym warunkami $\sigma_{\mathbf{s}}(x^k) = s_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Charakteryzacja ta może być też wyrażona w języku nieujemności pewnych macierzy stowarzyszonych z ciągiem $\mathbf{s}$ (Theorem 2.6). Jeżeli ciąg $\mathbf{s}$ jest dodatni, ale nie spełnia ostrej nierówności $\sigma_{\mathbf{s}}(p) > 0$ dla każdego nieujemnego wielomianu p, to nazywamy go singularnie dodatnim. Warunek singularnej dodatniości jest z kolei scharakteryzowany przez oszacowanie na funkcję indeksu $\mathrm{ind}_I(\mathbf{s}) \leqslant \frac{n}{2}$.

W sekcji 2.2 Autor otrzymuje odpowiedniki tych twierdzeń dla przedziałów $I = (0, \infty)$ oraz $I = (0, 1]$. Przeniesienie charakteryzacji ciągów momentów przez dodatniość na dowolny podprzedział $I \subset \mathbb{R}$ (Theorem 2.10) jest dość prostą obserwacją, jednak kolejne twierdzenie 2.13 ([B1; Thm. 3.8]), które charakteryzuje ścisłą dodatniość $\mathbf{s}$ przez warunki: $\mathrm{ind}_I(\mathbf{s}) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ dla $I = (0, \infty)$ oraz $\mathrm{ind}_I(\mathbf{s}) = \frac{n+1}{2}$ dla $I = (0, 1]$ jest dalece nietrywialne. Autor uzyskuje również twierdzenia o jednoznaczności miary indukującej dany ciąg momentów $\mathbf{s}$ w obu przypadkach $I = (0, \infty)$ oraz $I = (0, 1]$, przy czym jej atomy są jawnie opisane jako pierwiastki pewnych wielomianów związanych z $\mathbf{s}$ (wnioski 2.14 i 2.15). Autor następnie wykorzystuje te wyniki, aby zaproponować nowe podejście do problemu wstecznego rozszerzania skończonych ciągów momentów na $(0, \infty)$ i $(0, 1]$. Pewne wyniki dotyczące rozszerzania ciągów nieskończonych zostały uzyskane w pracach Szafrańca i Wrighta. W swojej rozprawie Doktorant zajmuje się jednak inną sytuacją, w której chcemy znaleźć rozszerzenie $\mathbf{s}' = (s_{-k}, \ldots, s_{-1}, s_0, s_1, \ldots, s_n)$ ciągu momentów $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \subset [0, \infty)$. Jeden z głównych wyników tej części, tj. twierdzenie 2.19 ([B1; Thm. 4.4]) podaje prostą charakteryzację ścisłej dodatniości rozszerzenia o jedną współrzędną w lewo, tj. $\mathbf{s}' = (s_{-1}, s_0, \ldots, s_n)$. Dalsze wyniki (twierdzenia 2.22–2.25) opisują kolejne momenty w ciągach dodatnich na $I = (0, \infty)$ oraz $I = (0, 1]$. Metody dowodowe użyte w tej części rozprawy głównie opierają się na elementarnej teorii miary i algebrze liniowej, ale przedstawione rozumowania są pomysłowe i dość złożone technicznie.

Rozdział drugi zawiera kilka drugorzędnych usterek redakcyjnych:

- Na str. 13 w definicji funkcji $\mathrm{ind}_I(\mu)$ niewłaściwe jest użycie jednocześnie warunku $c \in \operatorname{supp} \mu$ oraz funkcji $\chi_{\operatorname{supp} \mu}$; powinno tam być oczywiście sumowanie po $c \in I$.
- Na tej samej stronie występuje błąd w definicji $\mathrm{ind}_I(\mathbf{s})$; zamiast znaku supremum powinno być minimum (tak jak w artykule [B1] na str. 5).
- W wypowiedzi twierdzenia 2.23(i) chodziło zapewne o przedział $(t_1((s_{k+1}, \ldots, s_n)), \infty)$.

Opisane wyżej wyniki są kluczowe do wykazania głównych twierdzeń rozdziału trzeciego rozprawy dotyczących uzupełniania ważonych operatorów przesunięcia na drzewach skierowanych. Mówiąc precyzyjniej, rozważamy tu operatory na przestrzeni $\ell_2(V_{\eta,\kappa})$, gdzie

$$V_{\eta,\kappa} = \{-j \colon j \in \mathbb{N} \cap [0, \kappa - 1]\} \cup \{(i, j) \colon i \in \mathbb{N} \cap [1, \eta], \, j \in \mathbb{N}_1\}$$

jest zbiorem wierzchołków drzewa skierowanego z jednym rozgałęzieniem, którego zbiór krawędzi to

$$\begin{aligned} E_{\eta,\kappa} = \{((i, j), (i, j + 1)) \colon i \in \mathbb{N} \cap [1, \eta], \, j \in \mathbb{N}_1\} \cup \\ \cup \{(-j, -j + 1) \colon j \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa]\} \cup \{(0, (i, 1)) \colon i \in \mathbb{N} \cap [1, \eta]\}. \end{aligned}$$

Hł

Mając dany układ zespolonych wag $\lambda = (\lambda_e)_{e\in E}$ indeksowanych krawędziami grafu skierowanego (V, E) i spełniający warunek

$$\sup_{v\in V} \sum_{\{u\in V\colon (v,u)\in E\}} |\lambda_{(v,u)}|^2 < \infty,$$

określamy operator przesunięcia $S_\lambda \in \mathcal{B}(\ell_2(V))$ na bazie kanonicznej wzorem

$$S_\lambda e_v = \sum_{\{u\in V\colon (v,u)\in E\}} \lambda_{(v,u)} e_u \qquad (v \in V).$$

Twierdzenia 3.3 i 3.10 są głównymi wynikami rodziału trzeciego i rozwiązują one problem charakteryzacji istnienia odpowiednio: subnormalnego i całkowicie hiperekspansywnego uzupełnienia $S_{\lambda'}$ dla danego układu wag $\{\lambda_{-k}\}_{k=0}^{\kappa-1} \cup \{\lambda_{i,j}\}_{i,j=1}^{\eta,p}$ z ustalonym $p \in \mathbb{N}_1$, gdzie $\kappa \in \mathbb{N}$ jest skończona. Twierdzenia te uogólniają wcześniejsze wyniki uzyskane przez Exnera, Junga, Stochela i Yuna i stanowią istotny wkład w problem istnienia uzupełnień ważonych operatorów przesunięcia; przykładowo – odpowiednik twierdzenia 3.3 rozprawy, wykazany wcześniej przez przywołaną wyżej czwórkę autorów dotyczył jedynie sytuacji, gdzie $\kappa = 1$ i $p = 2$. Doktorant omawia również problem uzupełnienia subnormalnego w przypadku $\kappa = \infty$, który jest problemem otwartym, jednak istnieją interesujące częściowe wyniki, jak np. twierdzenie 3.8 rozprawy.

Jeżeli chodzi o zawartość rozdziału trzeciego, to mam następujące, raczej drugorzędne, uwagi krytyczne:

- W definicji 3.1 używamy operatorów przesunięcia danych przez ciągi wag indeksowane wierzchołkami drzewa, a nie jego krawędziami. Definicja takich operatorów formalnie nie pojawia się we wcześniejszym tekście rozprawy, jest ona za to użyta w artykule [B1]. Przed podaną w rozprawie definicją przydałoby się wytłumaczenie, że wagi postaci λ_{-k} i $\lambda_{i,j}$ utożsamiamy z wagami indeksowanymi odpowiednimi krawędziami $V_{\eta,\kappa}$ (w języku definicji podanej na str. 11).
- W lemacie 3.2 powinno być oczywiście $S_{\lambda'} \in \mathcal{B}(\ell_2(V_{\eta,\kappa}))$.
- Symbol $\mu_{i,1}^{\lambda'}$ użyty na górze strony 35 nie został wyjaśniony. Podobnie, nie zdefiniowano pojęcia miary „K-atomowej", które jest użyte np. w wypowiedzi twierdzenia 3.3
- Brakuje formalnego określenia tego, co rozumiemy przez *uzupełnienie* operatora $S_\lambda \in \mathcal{B}(\ell_2(V_{\eta,\kappa}))$ (mamy tylko definicję *p-generation completion*), tak jak jest to na str. 3 artykułu [B1]. Oczywiście nietrudno domyślić się, o co chodziło Autorowi.

Treść rozdziału czwartego oparta jest na pracy

[B2] M. Buchała, *M-isometric composition operators on discrete spaces*, Complex Anal. Oper. Theory **18** (2024), article no. 158,

która dotyczy klasyfikacji grafów odpowiadających operatorom złożenia na przestrzeni $L^2(\mu)$ z miarą dyskretną μ. Jak pokazuje Autor w twierdzeniu 4.5, jeżeli $T\colon X \to X$ jest odwzorowaniem zbioru przeliczalnego w siebie, a odpowiadający mu graf $G_T = (V_T, E_T)$, gdzie $V_T = X$ i $E_T = \{(Tx, x)\colon x \in X\}$, jest spójny, to albo G_T jest drzewem skierowanym bez korzenia, albo ma pewną specyficzną postać $(*)$ opisaną warunkami kombinatorycznymi. Autor zajmuje się w dalszej części pracy sytuacją, gdy zbiór X wyposażony jest w miarę dyskretną μ spełniającą $\mu(\{x\}) > 0$ dla każdego $x \in X$ oraz określony jest układ

th

wag $\lambda_T = (\lambda_e)_{e\in E}$ według wzoru $\lambda_{(u,v)} = \sqrt{\mu(\{v\})/\mu(\{u\})}$. Nietrudno wówczas zauważyć, że odpowiadający temu układowi ważony operator przesunięcia S_{λ_T} jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy pochodna Radona-Nikodyma h_T miary $\mu\circ T^{-1}$ względem μ jest funkcją ograniczoną. Co więcej, okazuje się S_{λ_T} jest unitarnie równoważny z operatorem złożenia $C_T f = f\circ T$, co jest jawnie opisane w lemacie 4.6. Jeżeli chodzi o ustalenie tych założeń, mam następującą uwagę:

- Napis $\mu\circ T^{-1} \ll \mu$ jest oczywiście poprawny, ale trochę mylący, bo sprawa sprowadza się w gruncie rzeczy do tego, że $\mu(A) > 0$ dla każdego $A \neq \varnothing$. Podobnie, zamiast $h_T \in L^\infty(X)$ może lepiej było napisać $h_T \in \ell^\infty(X)$.

W sekcjach 4.2 i 4.3 Autor zakłada, że graf G_T jest spójny i ma wspomnianą wyżej postać $(*)$. Główne wyniki tych dwóch sekcji to odpowiednio: charakteryzacja m-izometryczności operatora S_{λ_T} (twierdzenie 4.14, [B2; Thm. 5.5]) oraz charakteryzacja subnormalności S_{λ_T} (twierdzenie 4.19, [B2; Thm. 6.2]). Obie wspomniane wyżej charakteryzacje są dość skomplikowane, ale eleganckie. Warto zaznaczyć, że twierdzenie 4.14 pozwala na uzyskanie bardzo ładnego uogólnienia wyniku Kośmidera i Jabłońskiego dotyczącego związku między operatorami 2-izometrycznymi a całkowicie hiperekspansywnymi. Jak pokazał Autor w twierdzeniu 4.15, te dwie własności są dla operatorów postaci S_{λ_T} równoważne w przypadku dowolnego grafu G_T postaci $(*)$. Sekcja 4.3 również zawiera uogólnienie wyniku Kośmidera i Jabłońskiego dotyczące charakteryzacji subnormalności dualu Cauchy'ego $S'_{\lambda_T} = S_{\lambda_T}(S^*_{\lambda_T}S_{\lambda_T})^{-1}$ dla 2-izometrycznego operatora S_{λ_T}. Dowody, podobnie jak poprzednio, są tu w dużej mierze algebraiczne; wielokrotnie jest tu wykorzystywane np. twierdzenie Kroneckera-Capellego.

Ostatnią częśc rozprawy stanowi rozdział piąty, oparty na pracy

[B3] M. Buchała, *Unitarily equivalent bilateral weighted shifts with operator weights*, Opuscula Math. **44** (2024).

W pracy tej Autor zajmuje się problemem charakteryzacji unitarnej równoważności operatorów dwustronnego przesunięcia z operatorowymi wagami. Niech $(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (T_i)_{i\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{B}(H)$ będą jednostajnie ograniczonymi ciągami operatorów quasi-odwracalnych na przestrzeni Hilberta H. Rozważamy tutaj operatory $S, T \in \mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{Z}, H))$ określone wzorem $S(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (S_i x_{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}$, i analogicznym dla T. Głównym wynikiem tej części rozprawy jest twierdzenie 5.1 ([B3; Thm. 3.1]), które jest odpowiednikiem pewnego twierdzenia Lamberta i którego dowód jest długi i technicznie skomplikowany. Twierdzenie to podaje opis izometrii $U_0 \in \mathcal{B}(H, \ell_2(\mathbb{Z}, H))$ określonej jako $U_0 x = U(\ldots, 0, x, 0, \ldots)$ (x na zerowej współrzędnej), gdzie U jest operatorem unitarnym spełniającym $US = TU$. Autor wyodrębnił cztery techniczne własności izometrii U_0, które są równoważne unitarnej równoważności operatorów S i T. Prostym wnioskiem z powyższego twierdzenia jest elegancki wynik (wniosek 5.3), który stanowi rozszerzenie twierdzenia Lamberta dotyczącego przesunięć jednostronnych, i który mówi, że dla dowolnych ciągów $(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (T_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ operatorów unitarnych odpowiadające im operatory dwustronnego przesunięcia S i T są unitarnie równoważne. Twierdzenie 5.1 niesie za sobą również serię innych ciekawych wniosków, m.in. interesującym faktem jest to, że przy założeniach twierdzenia 5.1 operator unitarny $U \in \mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{Z}, H))$ daje unitarną równoważność między S i T wtedy i tylko wtedy, gdy daje równoważność między odpowiednimi czynnikami w rozkładach polarnych tych operatorów (twierdzenie 5.8).

fc

W sekcji 5.2 Autor zajmuje się sytuacją, gdy ciągi $(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (T_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ składają się z jednostajnie ograniczonych, dodatnich, komutujących operatorów, z których każdy ma dwie różne wartości własne. W tym przypadku, jak mówi twierdzenie 5.10, unitarna równoważność S i T, o ile zachodzi, może być zrealizowana przez operator unitarny z co najwyżej dwiema niezerowymi przekątnymi. Dowód tego twierdzenia jest ponownie dość złożony technicznie; wymaga pomysłowego operowania częściowymi izometriami i odwoływania się do kilku lematów – w tym do jednego z wniosków z twierdzenia 5.1.

Poza opisanymi wcześniej uwagami chciałbym wymienić jeszcze kilka innych bardzo drobnych usterek, które znalazłem w rozprawie:

- Użyta na stronie 7 symbolika E_η i E_κ wygląda na kolizję oznaczeń.
- Definicja widma podana na stronie 8 jest nieprawidłowa; operator $T - \lambda I$ ma być oczywiście nieodwracalny.
- Na stronie 9, w 3 wierszu od dołu powinno być μ_f.
- Na stronie 11, w wierszach 5 i 13 od dołu powinno być $\ell_2(V)$ zamiast V.
- W kilku miejscach źle używane są przedimki, np. na str. 8 powinno być „*a sequence of subspaces*", na str. 15 jest podwójne „*the*", na str. 44 powinno być „*on a discrete space*", natomiast na str. 47 „*an example of a graph*".

3. Konkluzja

Zawartość merytoryczną rozprawy oceniam wysoko i nie mam wątpliwości, że prezentuje ona poziom, który jest wymagany od rozpraw doktorskich z matematyki. Zawarte w rozprawie wyniki są interesujące i głebokie, odpowiadają na naturalne pytania i naturalnie rozwijają stan wiedzy na temat uogólnionych operatorów przesunięcia. Wyniki opatrzone są również wieloma ładnymi i bardzo trafnymi przykładami. Uważam, że przedstawiona praca stanowi znaczący wkład w teorię operatorów na przestrzeniach Hilberta. Rozprawa jest ponadto napisana bardzo starannie, a wymienione w tej recenzji uwagi i usterki mają charakter drugorzędny i nie wpływają na ogólną, wysoką ocenę rozprawy.

Uważam, że przedstawiona mi do oceny rozprawa doktorska pana mgr. Michała Buchały zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego oraz całkowicie spełnia wymagania ustawowe, opisane w ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, jak i wymagania zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim.

Z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Michała Buchałę do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Tomasz Kochanek

Tomasz Kochanek