Selected interpolation nodes for polynomial approximation

Dimitri Jordan Kenne
Department of Mathematics and Computer Sciences
Jagiellonian University
Email: dimitri.kenne@doctoral.uj.edu.pl

Supervisor:
Dr hab. Leokadia Białas-Cież, prof. UJ, Jagiellonian University

Abstract

Identifying suitable nodes for polynomial interpolation remains a complex issue, even for the univariate scenario. Nodes identified by Fekete points are superb for theoretical interpolation problems across all polynomially determining compact sets in $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 1)$, as their Lebesgue constants exhibit polynomial growth. However, they are specifically constructed for a limited number of sets and for other compact sets can only be computed numerically by addressing a highly challenging optimization problem. Leja sequences and pseudo Leja sequences (currently defined only for onedimensional case) present an intriguing type of interpolation nodes, which create sequences of nodes rather than arrays of nodes as seen in other instances. This thesis endeavors to uncover promising results for obtaining good nodes, particularly for multivariate polynomial interpolation. Our approach began with extending the definition of pseudo Leja sequences to the multivariate context in a coherent manner, aiming to yield potential good nodes. We then demonstrate that intertwining pseudo Leja sequences results in another pseudo Leja sequence. A general methodology for computing pseudo Leja sequences is provided, utilizing discrete meshes. Given that (weakly) admissible meshes are essential for deriving quality interpolation nodes, we have constructed optimal admissible meshes for polynomial curves in the complex plane, spheres, cubes, and simplices using Chebyshev points. These meshes prove to be suitable for approximating the Lebesgue constant of polynomial linear projectors, such as the interpolation operator, with a rigorous error margin. Finally, employing multidimensional Leja points, we propose a novel estimate for the transfinite diameter of the Bernstein set, which is optimal in the univariate context.

Streszczenie

Znalezienie odpowiednich węzłów dla interpolacji wielomianowej pozostaje skomplikowanym problemem, nawet w przypadku jednej zmiennej. Węzły nazywane punktani Feketego są doskonałe dla teoretycznych zagadnień interpolacji na wszystkich wielomianowo determinujących zbiorach zwartych w $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 1$), ponieważ ich stałe Lebesgue'a charakteryzują się wielomianowym wzrostem. Jednakże ich konstrukcja jest znana tylko dla ograniczonej liczby zbiorów. Na pozostałych zbiorach zwartych mogą być znalezione tylko numerycznie, poprzez rozwiązanie skomplikowanego problemu optymalizacyjnego. Ciągi Leji i pseudo Leji (zdefiniowane wcześniej tylko dla przypadku jednowymiarowego) są interesującymi rodzinami węzłów interpolacyjnych, które tworzą raczej ciąg węzłów, niż tablicę, jak w innych metodach.

Celem tej rozprawy jest przedstawienie obiecujących metod uzyskiwania dobrych węzłów, szczególnie dla interpolacji wielomianowej. Badania rozpoczęliśmy od rozszerzenia definicji ciągu pseudo Leji na przypadek wielowymiarowy, aby uzyskać potencjalnie dobre węzły. Następnie wykazaliśmy, że przeplatanie ciągów pseudo Leji prowadzi do nowego ciągu pseudo Leji. Zaprezentowaliśmy także ogólną metodę znajdowania ciągów pseudo Leji, wykorzystując dyskretne siatki wielomianowe. Mając na uwadze fakt, że (słabo) dopuszczalne siatki są kluczowe dla uzyskania wysokiej jakości węzłów interpolacyjnych, skonstruowaliśmy optymalne dopuszczalne siatki dla krzywych wielomianowych na płaszczyźnie zespolonej, jak również dla kul, kostek i sympleksów, używając punktów Czebyszewa. Te siatki okazały się być odpowiednie dla aproksymacji stałej Lebesgue'a dla wielomianowych projekcji liniowych, takich jak np. operator interpolacyjny. Możemy także precyzyjnie kontrolować błąd tej aproksymacji. Ponadto, korzystając z wielowymiarowych punktów Leji, zaproponowaliśmy nowe oszacowanie średnicy pozaskończonej zbiorów Bernsteina, które jest optymalne w przestrzeni jednowymiarowej.