UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU
Wydział Matematyki
i Informatyki

Prof. dr hab. Krzysztof Frączek
Wydział Matematyki i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 30 grudnia 2024

Recenzja rozprawy doktorskiej

Dynamical properties related to the Besicovitch pseudometric

mgr. Melih Emin Can

Wstęp. Rozprawa doktorska poświecona jest badaniu własności topologicznych i teorio-miarowych układów dynamicznych, a dokładniej odwzorowań ciągłych na przestrzeniach zwartych. Głównym celem rozprawy jest wyjaśnienie zależności pomiędzy różnymi wersjami własności specyfikacji i śledzenia, gdy są one rozpatrywane w swoich słabszych wersjach i spełniane są "w średniej". Pierwotne pojęcia specyfikacji i śledzenia mają swoje źródło w badaniach gładkich układów i odegrały kluczową rolę, jeszcze w poprzednim wieku (np. klasyczne prace Bowena z lat 70-tych i 80-tych), do rozwiązywania ważnych problemów, m.in. istnienia i jedyności miar maksymalizujących entropię. W ostatnich 15-tu latach tematyka związana z własnościami specyfikacji i śledzenia (oraz ich modyfikacji) przeżywa pewien renesans, związany z intensyfikacją badań nad strukturą miar niezmienniczych, możliwymi wartościami entropii Kołmogorowa-Sinaja, czy badaniem gładkich układów dynamicznych z osobliwościami lub na rozmaitościach niezwartych. Jednak obok głównego nurtu badań zagnieździł się dość duży ilościowo obszar badań dotykający tylko pojęć ważnych, ale mający luźny związek z fundamentalnymi problemami. Wygląda to czasami na kreowanie pojęć i badanie relacji pomiędzy nimi, bez głębszych refleksji na temat ich potencjalnych walorów dla rozwiązywania problemów fundamentalnych.

Główne zainteresowanie ocenianej rozprawy skupia się wokół własności śledzenia i specyfikacji "w średniej", co daje możliwość wykorzystania pseudo-metryki Besicovitcha w różnych swoich wersjach. Przy okazji, w rozprawie rozwinięto narzędzia korzystające z pseudo-metryki Besicovitcha w celu dowodzenia zachowywania własności spektralnych ergodycznych miar niezmienniczych przy przejściach granicznych. Są to wyniki zawarte w rozdziale 3, który stanowi nieco osobną część rozprawy, biorąc pod uwagę tematykę, ale spójną z całością ze względu na wspólny aparat dowodowy oparty na zastosowaniu pseudo-metryki Besicovitcha.

Rezultaty przedstawione w rozprawie pochodzą z trzech współautorskich artykułów naukowych. Jeden z nich jest opublikowany w czołowym czasopiśmie branżowym *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (zawierający wyniki rozdziału 4), podczas, gdy dwa pozostałe (zawierające wyniki rozdziałów 3 i 5) mają formę preprintów zamieszczonych w repozytorium *arXiv*.

Omówienie rezultatów. Rozprawa zaczyna się od napisanego dość formalnie i sucho wprowadzenia (rozdział 1), oraz rozdziału 2, w którym autor przedstawia pojęcia niezbędne do zrozumienia rezultatów i dowodów znajdujących w głównej merytorycznej części rozprawy, składającej się z rozdziałów 3, 4 i 5.

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń, Polska, tel. +48 56 611 3410, fax +48 56 611 29 87, e-mail: wmii@mat.umk.pl
www.mat.umk.pl

UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU
Wydział Matematyki
i Informatyki

Głównym celem rozdziału 3 jest udowodnienie twierdzenia 3.3.4, które mówi, że dla ustalonego ciągłego odwzorowania T przestrzeni zwartej X jeśli $(\mu_k)_k$ jest ciągiem ergodycznych miar niezmienniczych zbieżnym do miary ergodycznej μ w sensie metryki, która jest odpowiednikiem standardowej metryki $\bar{d}$ Ornsteina, to widma (ich dyskretne części) ciągu układów (X, T, μ_k) zbiegają (w pewnym sensie) do widma (X, T, μ). Mimo, że większość argumentów użytych w tym rozdziale jest efektem prostej strategii: jeśli mamy dwie miary niezmiennicze i ich punkty generujące są bliskie w sensie pseudo-metryki Besicovitcha, to całki względem tych miar są bliskie, to niektóre z rezultatów tego rozdziału zasługują na większą uwagę. Kluczowy tutaj jest wniosek 3.2.4, który wyjaśnia relację pomiędzy odległością Ornsteina pomiędzy miarami oraz pseudo-odległością Besicovitcha pomiędzy ich punktami generującymi i quasi-generującymi. Dowód tego wniosku (tak naprawdę zawarty w dowodzie twierdzenia 3.2.1) jest dość pomysłowy. Ponadto, oba wspominane rezultaty (twierdzenia 3.2.1 i wniosek 3.2.4) są kluczowym elementem prowadzącym elegancko do dowodu głównego twierdzenia 3.3.4. Rozdział 3 kończy się zastosowaniem głównego rezultatu (jego wersji) do tzw. układów B-wolnych, ale to zastosowanie mnie specjalnie nie przekonuje, bo nie wnosi żadnej nowej wiedzy na temat miary Mirskiego.

Zdecydowanie najbardziej wartościową częścią rozprawy jest rozdział 4, w którym wyjaśniono zależności pomiędzy takimi pojęciami, jak $\bar{d}$-przybliżanie ($\bar{d}$-approachability), $\bar{d}$-śledzenie ($\bar{d}$-shadowing), $\bar{d}_{\mathcal{M}}$-przybliżanie ($\bar{d}_{\mathcal{M}}$-approachability) oraz $\bar{d}_{\mathcal{M}}$-stabilność dla układów shiftowych. Własności przybliżania oznaczają, że układ shiftowy jako zbiór jest przybliżany przez swoje markowowskie aproksymacje w metryce Hausdorffa $\bar{d}^H$ indukowanej przez pseudo-metrykę $\bar{d}$ lub zbiór miar niezmienniczych jest przybliżany przez zbiory miar niezmienniczych swoich markowowskich aproksymacji w metryce $\bar{d}^H_{\mathcal{M}}$. Własność $\bar{d}_{\mathcal{M}}$-stabilności, z grubsza mówiąc, oznacza, że małe słabe zaburzenia miar niezmienniczych są małymi zaburzeniami miar niezmienniczych również w metryce $\bar{d}_{\mathcal{M}}$.

Jednym z najważniejszych rezultatów rozdziału 4 jest Proposition 4.2.3 mówiący, że $\bar{d}$-śledzenie implikuje $\bar{d}_{\mathcal{M}}$-stabilność. Mimo, że dowód tego rezultatu nie jest zaawansowany, to wraz z twierdzeniem 4.1.5 (z artykułu [26]) stoi u podstaw konstrukcji proksymalnego oraz minimalnego przykład układu $\bar{d}_{\mathcal{M}}$-stabilnego. Oba przykłady są bardzo ciekawe, a ich konstrukcja polega na zgrabnym określeniu ciągu mieszających układów markowa, który jest zbieżny w $\bar{d}^H$. Wspomniane przykłady stanowią najbardziej nowatorski oraz technicznie zaawansowany fragment rozprawy, ponadto odpowiadają one pozytywnie na otwarte pytanie Tima Austina na temat istnienia układów $\bar{d}_{\mathcal{M}}$-stabilnych bez własności specyfikacji.

Rozdział 4 zawiera również pouczającą dyskusję na temat różnic pomiędzy zbieżnością w $\bar{d}^H$ oraz $\bar{d}^H_{\mathcal{M}}$. Tutaj również autorzy musieli się wykazać pomysłowością.

Głównym celem rozdziału 5 jest pokazanie równoważności pojęć asymptotycznej średniej własności śledzenia i nieprecyzyjnej specyfikacji (vague specification), patrz twierdzenie 5.3.5. To trochę dziwne, że autor tego pierwszego pojęcia, które jest znacznie późniejsze, nie zauważył tego faktu. Rozdział 5 kończy przykład

UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU
Wydział Matematyki
i Informatyki

układu shiftowego, który posiada własność asymptotycznego średniego śledzenia i jest proksymalny co wyklucza klasyczne i słabe własności specyfikacji. W ten sposób nieprecyzyjna specyfikacja jest istotnie słabsza od słabej specyfikacji. Inna sprawa, że różnica pomiędzy asymptotyczną średnią własnością śledzenia oraz słabą specyfikacją była już znana, ale jak dobrze zrozumiałem nie w pełni zinterpretowana.

Ocena rozprawy. Rozprawa niewątpliwie zawiera oryginalne rozwiązania problemów dotyczących relacji pomiędzy nieklasycznymi pojęciami związanymi ze śledzeniem, specyfikacją oraz naturą zbiorów miar niezmienniczych. Zdecydowanie najciekawszą oraz technicznie zaawansowaną częścią rozprawy jest rozdział 4, który jest zwieńczony dwoma przykładami układów $\bar{d}_{\mathcal{M}}$-stabilnych, które są proksymalne lub minimalne. Zarówno same przykłady oraz kombinacja argumentów prowadzących do konkluzji są eleganckie, ciekawe i skomplikowane. Nie przy wszystkich rezultatach zawartych w rozprawie miałem te same odczucia.

Rozprawa jest napisana dobrze choć nie oznacza, że czyta się ją łatwo. Styl rozprawy jest raczej formalny, co nie ułatwia czytania przez czytelnika, który pierwszy raz zetknął się z większością rozważanych pojęć. Badany jest cały gąszcz pojęć, które na pierwszy rzut oka niewiele się od siebie różną (czasem faktycznie okazują się być tym samym), bez głębszego wyjaśnienia dlaczego taką mnogość pojęć badamy. W przypadku czytelnika, który nie jest specjalistą w temacie, przekopanie się przez wspomniany gąszcz pojęć jest raczej bolesnym przeżyciem. Ponadto czytania nie ułatwia brak rzetelnych głębokich motywacji dla rozważnych pojęć, które mogłyby stymulować ciekawość czytelnika. Po przeczytaniu rozdziału 5 i dyskusji tam zawartych, moje wątpliwości co do nadmiarowej mnogości pojęć jeszcze się pogłębiły. Mam wrażenie, że autor pojęcia asymptotycznej średniej własności śledzenia nie do końca przemyślał swój pomysł i zasiał więcej chaosu niż rozumienia w badania związane z tematyką rozprawy. Być może przeważyła większa dbałość o ilość niż o jakość badań.

Jak zwykle przy pisaniu długich tekstów, autor roprawy nie uchronił się od zrobienia drobnych pomyłek, ale na akceptowalnym poziomie. Wymienione tu krytyczne uwagi, dotyczące raczej tematyki niż samej rozprawy, nie wpływają jednak na moją zdecydowanie pozytywną ocenę poziomu rozprawy doktorskiej.

Podsumowanie. W moim przekonaniu rozprawa mgr. Meliha Emina Cana pt. „Dynamical properties related to the Besicovitch pseudometric" spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim, w szczególności rozprawa prezentuje oryginalne rozwiązanie problemu naukowego wymagane przez ustawę. Uzyskane przez kandydata wyniki świadczą o dobrym opanowaniu warsztatu matematycznego i umiejętności rozwiązywania problemów dynamiki topologicznej.

W związku z tym przedkładam Radzie Dyscypliny Matematyka Uniwersytetu Jagiellońskiego pozytywną recenzję rozprawy oraz wniosek o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie jej do dalszych etapów postępowanie w sprawie nadania stopnia doktora mgr. Melihowi Eminowi Canowi.

Krzysztof Frączek

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń, Polska, tel. +48 56 611 3410, fax +48 56 611 29 87, e-mail: wmii@mat.umk.pl
www.mat.umk.pl