dr hab. Wiesława Kaczor
Instytut Matematyki UMCS
pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1
20-031 Lublin
wieslawa.kaczor@poczta.umcs.lublin.pl

Lublin, 09. 05. 2013 r.

Recenzja w przewodzie habilitacyjnym dra Piotra Kota.

Dr Piotr Kot ukończył studia matematyczne na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w 1995 roku uzyskując stopień magistra matematyki. Promotorem jego pracy magisterskiej był prof. dr hab. Marek Jarnicki. Następnie w 1998 roku na tym samym wydziale uzyskał stopień magistra informatyki pisząc pracę magisterską pod kierunkiem dr Macieja Ślusarka. W roku 2003 dr Piotr Kot otrzymał tytuł doktora nauk matematycznych także na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego na podstawie rozprawy *Zbiory wyjątkowe*, której promotorem był doc. dr hab. Piotr Jakóbczak. Od 1998 roku do chwili obecnej pracuje w Instytucie Matematyki Politechniki Krakowskiej.

Dr Piotr Kot interesuje się analizą zespoloną i metodami numerycznymi. Na jego dotychczasowy dorobek publikacyjny składa się 18 prac, z których 16 ukazało się po otrzymaniu stopnia doktora nauk matematycznych. Kilka z nich dotyczy zbiorów wyjątkowych, a taki jest tytuł jego rozprawy doktorskiej. Dr Piotr Kot nie wskazał jednak ani w swoim autoreferacie ani też w dołączonym spisie publikacji, które prace zawierają wyniki z jego pracy doktorskiej. Dodam tutaj, że jedna z prac została opublikowana w Computational Methods in Science and Technology i związana jest z numerycznymi zainteresowaniami dra Piotra Kota. Żadna z 18 prac nie ma współautora.

Na rozprawę habilitacyjną *Funkcja wewnętrzna* dra Piotra Kota składają się następujące prace opublikowane w latach 2007 - 2011:

[K1.] Homogenous polynomials on strictly convex domains, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 3895-3903. (25 pkt.)
[K2.] A holomorphic function with given almost all boundary values on a domain with holomorphic support function, J. Convex Analysis 14 (2007), 693-704. (35 pkt.)
[K3.] Bounded holomorphic functions with given maximum modulus on all circles, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 179-187. (25 pkt.)
[K4.] Peak set crossing all the circles, J. Convex Analysis 16 (2009), 515-521. (35 pkt.)
[K5.] About boundary values in $A(\Omega)$, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 4063-4079. (35 pkt.)

W nawiasach podałam liczbę punktów za publikację w danym czasopiśmie z ostatniej listy ministerialnego Ujednoliconego Wykazu Czasopism Punktowanych (21 grudnia 2012).

Rozprawa habilitacyjna poświęcona jest zagadnieniom związanym z funkcjami wewnętrznymi. Problem znalezienia funkcji wewnętrznej dla kuli jednostkowej $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$, gdzie $n > 1$, był otwarty przez wiele lat. Postawił go w 1965 roku W. Rudin, a pierwsze przykłady nietrywialnych takich funkcji pojawiły się dopiero po prawie dwudziestu latach od postawienia problemu - w 1982 roku (przykład E. Løwa) i w 1983 roku (przykład A. B. Aleksandrova). Odkryto także inne konstrukcje takich funkcji i to nawet dla obszarów innych niż kula, np. E. Løw uogólnił w ten sposób swój poprzedni wynik wykorzystując tzw. "holomorphic support functions". Omówię teraz wyniki przedstawione przez dra Piotra Kota w jego rozprawie habilitacyjnej.

Praca [K2] dra Piotra Kota dotyczy istnienia funkcji wewnętrznej dla pewnych obszarów ograniczonych w $\mathbb{C}^n$ i wynikających z tego faktu konsekwencji. Nowa konstrukcja przedstawiona przez dra Piotra Kota jest związana z wprowadzeniem przez niego nowej rodziny funkcji, które są w pracy [K2] także nazywane holomorphic support functions. Uzyskał on w ten sposób następujące wyniki. Najpierw pokazał on, że jeśli Ω jest ograniczonym, silnie pseudowypukłym obszarem z brzegiem klasy C^2, to Ω ma holomorphic support function na brzegu $\partial\Omega$ (patrz [K2], Przykład 2.1). Następnie udowodnił twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Niech σ będzie borelowską miarą probabilistyczną na $\partial\Omega$ oraz niech S będzie zbiorem borelowskim w $\partial\Omega$ takim, że $\sigma(S) = 1$. Załóżmy ponadto, że Ω ma holomorphic support function na S. Przy tych założeniach, jeśli G jest półciągłą i silnie dodatnią ($\inf_{z\in\partial\Omega} G(z) > 0$) funkcją na $\partial\Omega$, to istnieje zbiór $\tilde{S}$ borelowski w $\partial\Omega$ oraz niestała funkcja holomorficzna f na Ω o następujących własnościach:*

(1) $\sigma(\tilde{S}) = \sigma(S) = 1$.

(2) *Istnieje ciąg $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji holomorficznych na Ω, ciągłych na $\overline{\Omega}$, zbieżny lokalnie jednostajnie do f na Ω i taki, że $\lim_{n\to\infty} |g_n(z)| = G(z)$ dla $z \in \tilde{S}$ oraz $|g_n(z)| < G(z)$ dla $z \in \partial\Omega$.*

(3) *Jeśli $\gamma : [0,1] \ni t \to \gamma(t) \in \overline{\Omega}$ jest ciągłą krzywą przecinającą $\partial\Omega$ niestycznie w $\gamma(1) = z \in \tilde{S}$, to istnieje ciąg $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ taki, że $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$ oraz $\lim_{n\to\infty} |f(\gamma(t_n))| = G(z)$.*

Z tego twierdzenia jako wniosek uzyskał przedstawione niżej twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$ o brzegu klasy C^2 i niech G będzie ograniczoną, dolnie półciągłą i silnie dodatnią funkcją na $\partial\Omega$. Niech ponadto η oznacza $(2n-1)$-wymiarową miarę Hausdorffa na $\partial\Omega$. Załóżmy także, że Ω ma holomorphic support function na zbiorze borelowskim S pełnej miary η. Wtedy istnieje ograniczona funkcja holomorficzna f na Ω taka, że $\|f\|_\Omega \leqslant \|G\|_{\partial\Omega}$ oraz $|f^*(z)| = G(z)$ dla η-prawie wszystkich $z \in \partial\Omega$, gdzie f^* jest granicą niestyczną funkcji f.*

Z zagadnieniem istnienia funkcji wewnętrznych związane są też wielomiany jednorodne - pewne wielomiany jednorodne, których istnienia dowiedli J. Ryll i P. Wojtaszczyk, wykorzystał już A. B. Aleksandrov do uproszczenia swojej wcześniejszej konstrukcji funkcji wewnętrznej. Istotne są więc własności wielomianów jednorodnych i tym też zajmował się dr Piotr Kot. Pozwoliły mu one otrzymać konstrukcję funkcji wewnętrznej F, której granice niestyczne F^* przyjmują wartości maksymalne na okręgach i uzyskać następujące twierdzenie [K3].

Twierdzenie 3. *Niech Ω będzie ograniczonym, silnie wypukłym obszarem kołowym w $\mathbb{C}^n$ o brzegu klasy C^2. Niech h będzie funkcją ciągłą i silnie dodatnią na $\partial\Omega$ oraz taką, że $h(z) = h(\lambda z)$ dla $|\lambda| = 1$. Wówczas istnieje funkcja ograniczona funkcja holomorficzna $F \in \mathbb{O}(\Omega)$ taka, że $|F^*(z)| = h(z)$ dla prawie wszystkich $z \in \partial\Omega$ oraz $\max_{|\lambda|<1} |F(\lambda z)| = h(z)$ dla wszystkich $z \in \partial\Omega$.*

Dalsze badania wielomianów doprowadziły go też do konstrukcji zbioru szczytowego dla $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ [K4].

Twierdzenie 4. *Niech Ω będzie zbalansowanym, ograniczonym i silnie wypukłym obszarem kołowym w $\mathbb{C}^n$ o brzegu klasy C^2. Wtedy istnieje zbiór zwarty $K \subset \partial\Omega$ oraz funkcja $f \in A(\Omega)$ holomorficzna i ciągła do brzegu taka, że*

(1) $\mathbb{S}K = \partial\Omega$, *gdzie* $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$,
(2) $f = 1$ *na* K,
(3) $0 < |f| < 1$ *na* $\bar{\Omega} \setminus K$.

Zauważmy, że dr Piotr Kot zajmował się także maksymalnymi zbiorami modułowymi, które spełniają słabszy warunek niż zbiory szczytowe [K3].

Jeszcze raz wykorzystując wielomiany jednorodne dr Piotr Kot dowiódł następującego twierdzenia [K5]:

Twierdzenie 5. *Niech Ω będzie ograniczonym, silnie wypukłym obszarem kołowym w $\mathbb{C}^n$ o brzegu klasy C^2. Załóżmy, że $g \in A(\Omega)$ jest funkcją holomorficzną ciągłą do brzegu oraz, że h jest dolnie półciągłą i silnie dodatnią funkcją na $\partial\Omega$ taką, że $|g(z)| < h(z)$ oraz $\|h\|_z < \infty$ dla $z \in \partial\Omega$. Wówczas istnieje funkcja $f \in \mathbb{O}(\Omega)$, dla której*

$$\sup_{|\lambda|<1} f(\lambda z)| \leqslant \max_{|\lambda|=1}(h + |g|)(\lambda z) \quad \textit{oraz} \quad \|h - |g + f^*|\|_z = 0$$

dla $z \in \partial\Omega$, gdzie f^* oznacza granicę radialną funkcji f. Co więcej, możemy uzyskać funkcję f dowolnie małą na zadanym zbiorze zwartym $F \subset \Omega$ oraz zerującą się do zadanego rzędu w zerze.

W powyższym twierdzeniu $\|f\|_z$ oznacza wartość średnią funkcji f, czyli normę $\|f\|_z := \sqrt{\int_0^1 |f(e^{2\pi it}z)|^2 dt}$, w punktach $z \in \partial\Omega$.

Podam teraz wynik z pracy [K1]. W pracy tej dr Piotr Kot dowodzi istnienia ciągu $\{p_m\}$ jednorodnych wielomianów p_m stopnia m mających następujące własności. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie ograniczonym i silnie wypukłym obszarem kołowym o brzegu klasy C^2. Niech X będzie zwartym zbiorem kołowym zawierającym jedynie punkty silnej wypukłości brzegu $\partial\Omega$. Wtedy istnieje liczba naturalna K oraz ciąg $\{p_m\}$ wielomianów jednorodnych stopnia m takich, że dla każdego $0 < \epsilon < 1$ i dla każdej pary rozłącznych, zwartych obszarów kołowych $T \subset X$ i $D \subset \partial\Omega$ istnieje liczba naturalna m_0 (zależna od T, D i ϵ) taka, że

1. $|p_m(z)| \leqslant 2$ dla wszystkich $z \in \partial\Omega$ i $m > m_0$,
2. $\sum\limits_{k=Km}^{K(m+1)-1} |p_k(z)|^2 \geqslant \frac{1}{4}$ dla wszystkich $z \in T$ i $m > m_0$,
3. $\sum\limits_{k=Km}^{K(m+1)-1} |p_k(z)|^2 \leqslant 2^{-(Km)^{1-\epsilon}}$ dla wszystkich $z \in D$ i $m > m_0$.

Wynik ten zainspirowany był pracą P. Wojtaszczyka, w której dowiedziono istnienia liczby naturalnej K oraz ciągu $\{p_m\}$ wielomianów jednorodnych stopnia m dla kuli $\mathbb{B}^n$. Wielomiany te były wspólnie ograniczone na $\partial\mathbb{B}^n$ ($|p_m(z)| \leqslant 2$ dla $z \in \partial\mathbb{B}^n$) i takie, że $\sum\limits_{k=Km}^{K(m+1)-1} |p_k(z)|^2 \geqslant \frac{1}{2}$ dla $z \in \partial\mathbb{B}^n$ i dostatecznie dużych m.

Dzięki zastosowaniu wielomianów jednorodnych mających własności 1. 2. i 3. dr Piotr Kot dowodzi, że jeśli Ω jest ograniczonym i silnie wypukłym obszarem kołowym o brzegu klasy C^2, $\mathbb{D}$ jest otwartym dyskiem jednostkowym w $\mathbb{C}$ i $\mathcal{L}^2_{\mathbb{D}z}$ oznacza dwuwymiarową miarę Lebesgue'a na $\mathbb{D}z$, to dla dowolnego podzbioru kołowego $E \subset \partial\Omega$ istnieje funkcja holomorficzna całkowalna z kwadratem na $\Omega \setminus \mathbb{D}E$ i taka, że

$$E = E^2_\Omega(f) := \left\{ z \in \partial\Omega : \int_{\mathbb{D}z} |f|^2 d\mathcal{L}^2_{\mathbb{D}z} = +\infty \right\},$$

tzn. E jest zbiorem wyjątkowym.

Zauważmy tutaj, że w swojej pracy *A holomorphic function with given almost all boundary values on a domain with holomorphic support function* [K2] dr Piotr Kot uzyskał również wynik dotyczący zbiorów wyjątkowych przy założeniu istnienia zdefiniowanej przez niego holomorphic support function. Zakładamy więc teraz, że Ω jest ograniczonym obszarem kołowym w $\mathbb{C}^n$ takim, że $\gamma : [0,1] \ni t \to tz \in \overline{\Omega}$ przecina niestycznie zbiór Ω w $z \in \partial\Omega$ oraz, że Ω ma holomorphic support function na $\partial\Omega$. Wprowadzamy też $(n-1)$-wymiarową przestrzeń rzutową $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(\partial\Omega) := \{[z] : z \in \partial\Omega\}$, gdzie $[z] := \partial\mathbb{D}z$.

Przy tych założeniach prawdziwe jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 6. *Niech η będzie borelowską miarą probabilistyczną na $\mathbb{P}^{n-1}$ oraz niech G będzie silnie dodatnią i dolnie półciągłą funkcją na $\mathbb{P}^{n-1}$. Wtedy istnieje funkcja h holomorficzna na Ω i taka, że $G(z) = \int_{\mathbb{D}} |h(\lambda z)|^2 d\mathcal{L}^2(\lambda)$ dla η-prawie wszystkich $z \in \mathbb{P}^{n-1}$ i $\int_{\mathbb{D}} |h(\lambda z)|^2 d\mathcal{L}^2(\lambda) \leqslant G(z)$ dla wszystkich $z \in \partial\Omega$.*

Z tego twierdzenia dr Piotr Kot otrzymał następujący opis zbiorów wyjątkowych.

Twierdzenie 7. *Niech E będzie zbiorem typu G_δ w $\mathbb{P}^{n-1}$ i niech η będzie borelowską miarą probabilistyczną na E. Wtedy istnieje funkcja holomorficzna f taka, że $\int_{\Omega\setminus\mathbb{D}E} |f|^2 d\mathcal{L}^{2n} < \infty$ oraz $E^2_\Omega(f) \subset E$, $\eta(E) = \eta(E^2_\Omega(f)$, gdzie*

$$E^2_\Omega(f) := \left\{ z \in \mathbb{P}^{n-1} : \int_{\mathbb{D}} |f(\lambda z)| d\mathcal{L}^2(\lambda) = \infty \right\}.$$

Przypominam tutaj, że gdy Ω jest ograniczonym silnie pseudowypukłym obszarem o brzegu klasy C^2, to obszar ten ma holomorphic support function na brzegu $\partial\Omega$ (patrz [K2, Przykład 2.1]) i stąd mamy pośredni związek wyniku z pracy [K1] z funkcją wewnętrzną.

Moim zdaniem rezultaty przedstawione w rozprawie habilitacyjnej są interesujące, a ich dowody nietrywialne. Warto także podkreślić, że wszystkie prace stanowiące rozprawę są opublikowane w bardzo dobrych czasopismach: *Proceedings of the American Mathematical Society, Journal of Convex Analysis* i *Transactions of the American Mathematical Society*. Dodam również, że prace [K1]- [K5] stanowią, jak tego wymaga ustawa, *jednotematyczny cykl publikacji.*

Przejdę teraz do omówienia pozostałego dorobku naukowego dra Piotra Kota. Jest on autorem 13 prac, które nie wchodzą w skład rozprawy habilitacyjnej. Sześć spośród nich dotyczy zbiorów wyjątkowych. Prace te związane są więc z tematem rozprawy doktorskiej dra Piotra Kota. Trzy dalsze prace poświęcone są problemowi Radona (Radon Inversion Problem)rekonstrukcji funkcji holomorficznej na podstawie zbioru wartości jej całek wzdłuż zadanego zbioru kierunków (z tymi pracami jest również związana praca [K1] wchodząca w skład rozprawy habilitacyjnej). W pozostałych czterech pracach dr Piotr Kot zajmuje się zbiorami pluripolarnymi (1 praca), problemem Gleasona (1 praca), podaje prosty dowód identyczności metryki Caratheodory'ego oraz wewnętrznej metryki Caratheodory'ego dla pierścienia (1 praca) i przedstawia algorytm pozwalający obliczać grupy homologii (także 1 praca). Dodam także, że 10 spośród tych prac ukazało się w czasopismach wyróżnionych w Journal Citation Reports (ICR): *Journal of Convex Analysis (35), Potential Analysis (35), Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin (15), Canadian Mathematical Bulletin (15)* i *Czechoslovak Mathematical Journal (15).* W nawiasach podałam liczbę punktów za publikację w danym czasopiśmie z ostatniej listy ministerialnego Ujednoliconego Wykazu Czasopism Punktowanych (21 grudnia 2012).

Słabszą stroną działalności naukowej dra Piotra Kota jest udział w konferencjach. Uczestniczył bowiem tylko w trzech krajowych konferencjach naukowych, ostatnia z nich w 2005 roku. Należy tutaj jednak zaznaczyć, że dr Piotr Kot od 1998 roku jest stałym uczestnikiem Seminarium Analizy Zespolonej w Katedrze Analizy Matematycznej na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Po powyższej pozytywnej ocenie całości dorobku naukowego i działalności naukowej dra Piotra Kota chciałabym jeszcze podkreślić, że zarówno treść jak i redakcja autoreferatu wskazują na jego dużą wiedzę i dojrzałość naukową.

Na zakończenie wspomnę krótko o dorobku dydaktycznym, organizacyjnym i popularyzatorskim dra Piotra Kota. Dr Piotr Kot wypromował do tej pory 18 magistrów matematyki. Na wyróżnienie zasługuje także fakt, że powierzono mu prowadzenie zajęć w ramach programu Erasmus. Brał także udział w projektach współfinansowanych ze środków unijnych. Jego wykształcenie informatyczne zostało wykorzystane do prowadzenia szkoleń z zakresu pracy w systemie Linux. Opracował także bazę danych osobowych pracowników Instytutu Matematyki Politechniki Krakowskiej i stale ją aktualizuje. Wielokrotnie uczestniczył w pracach komisji rekrutacyjnych na Wydziale Fizyki, Matematyki i Informatyki Politechniki Krakowskiej i promował Politechnikę Krakowską podczas Dni Nauki.

Konkluzja: Uważam, że osiągnięcie naukowe (rozprawa habilitacyjna) dra Piotra Kota zatytułowane "Funkcja wewnętrzna"wnosi istotny wkład w rozważaną dziedzinę badań, a jego dorobek twórczy i inne osiągnięcia spełniają wymagania określone w *Ustawie o stopniach naukowych i tytule naukowym z dnia 14.03.2003.* W świetle powyższego z całkowitym przekonaniem wnioskuję o dopuszczenie dra Piotra Kota do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Mirosława Kaczmar