INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

dr hab. Jonatan Gutman, prof. IM PAN
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
tel: +48 788 830 967, email: y.gutman@impan.pl
https://www.impan.pl/~gutman/

Warszawa, 14 stycznia 2025 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej "Dynamical properties related to the Besicovitch pseudometric" mgr Melih Emin Can

Wstęp

Rozprawa doktorska, napisana w języku angielskim, składa się z 77 stron i jest podzielona na 5 rozdziałów w tym wprowadzenie. Zawiera spis treści oraz bibliografię. Rozprawa została napisana pod kierunkiem dra hab. Dominika Kwietniaka (Promotor), prof. UJ i dra Borysa Kucy (Promotor pomocniczy) i opiera się na preprincie w przygotowaniu "Sejal Babel, Melih Emin Can, Dominik Kwietniak, and Piotr Oprocha. Spectrum of invariant measures via generic points." (Rodział 3), na artykule "Melih Emin Can, Jakub Konieczny, Michał Kupsa, and Dominik Kwietniak. Minimal and proximal examples o $\overline{d}$-stable and $\overline{d}$-approachable shift spaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1--31, 2024" (Rodział 4) oraz na preprincie arXiv (arXiv:2411.01556) "Can, Melih Emin, and Alexandre Trilles. "The equivalence of asymptotic average shadowing and vague specification properties and its consequences." (Rozdział 5). Chcę podkreślić, że w odniesieniu do wszystkich tych prac otrzymałem oświadczenia że wszyscy autorzy mają równy wkład.

Jak tytuł rozprawy sugeruje w centrum rozprawy stoi **pseudometryka Besicovitcha**. Jej definicja jest dość prosta: Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym i ρ metryką kompatybilną na X, dla $x, y \in X$ definiujemy:

$$D_B(x,y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho(T^j(x), T^j(y))$$

Rozdziały rozprawy dotyczą różnych aspektów pseudometryki Besicovitcha ale można je czytać niezależnie. Osobiście uważam, że Rozdział 3 jest najciekawszą częścią rozprawy.

Omówienie treści rozprawy

Klasycznym pomysłem w teorii ergodycznej który zasłynął poprzez wykorzystanie go przez Katoka i Stepina W ich przełomowym artykule z 1967 r. jest zbadanie własności układów dynamicznych, np. określanie, czy układ ma proste widmo, przy użyciu aproksymującego ciągu układów okresowych. Bardziej ogólnie, można zastąpić ciąg aproksymujących układów okresowych przez *aproksymującym* ciągiem *prostszych układów*, dla których mamy pełną wiedzę o pożądanej własności. Taka metoda ma zalety, o ile uzasadnia się, co oznacza *prostszy* i *aproksymujący*. Zrobiono to dokładnie w rozdziale trzecim rozprawy. Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym i ρ metryką kompatybilną na X. Niech $\mathcal{M}_T^e(X)$ oznacza zbiór miar ergodycznych na X. Główne twierdzenie trzeciego rozdziału rozprawy jest następujące:

Twierdzenie 3.4.8 (str. 33). Niech (X, T) będzie topologicznym układem dynamicznym, a $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb całkowitych dodatnich. Załóżmy, że dla każdego $m \geqslant 1$, $x_m \in X$ jest quasi-generyczny dla $\mu_m \in \mathcal{M}_T^e(X)$ wzdłuż $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$. Jeżeli istnieje punkt $x \in X$ taki, że pseudometryka Besicovitcha wzdłuż podciągu spełnia

$$\lim_{m\to\infty} D_B^{(n_k)}(x, x_m) = \lim_{m\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{n=0}^{n_k-1} \rho(T^n(x), T^n(x_m)) = 0,$$

to zachodzi:

1. Istnieje $\mu \in \mathcal{M}_T^e(X)$ taki, że $\mu_m \to \mu$ jako $m \to \infty$ w topologii *-słabej i x jest quasi-generyczny dla μ wzdłuż $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$;

2. $\liminf_{m\to\infty} h(\mu_m) \geqslant h(\mu)$;

3. $\mathrm{Spec}(X, T, \mu) \subseteq \liminf_{k\to\infty} \mathrm{Spec}(X, T, \mu_k) := \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcap_{k=K}^{\infty} \mathrm{Spec}(X, T, \mu_k)$;

4. Jeśli μ_m ma (racjonalne) dyskretne widmo dla nieskończenie wielu m, to tak samo ma μ;

5. Jeśli μ_m jest całkowicie ergodyczny (odpowiednio, słabo mieszający) dla nieskończenie wielu m, to μ jest całkowicie ergodyczny (odpowiednio, słabo mieszający).

Niech $\mathscr{B} \subset \mathbb{N}$. Liczba całkowita dodatnia jest nazywana **$\mathscr{B}$-wolną**, jeśli nie jest podzielna przez żaden element zbioru $\mathscr{B}$. Zbiór liczb $\mathscr{B}$-wolnych jest dany wzorem

$$\mathscr{F}_{\mathscr{B}} = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{b \in \mathscr{B}} b\mathbb{N}.$$

Zdefiniuj $\eta_{\mathscr{B}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ przez $(\eta_{\mathscr{B}})_j = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $j \in \mathscr{F}_{\mathscr{B}}$. Domknięcie ciągu $\eta_{\mathscr{B}}$ nazywane jest **$\mathscr{B}$-wolnym przesunięciem** i oznaczane jest przez $X_{\mathscr{B}}$. Definicję tę wprowadzili El Abdalaoui, Lemańczyk i de la Rue w 2015 r. po tym, jak Sarnak w 2010 r. rozpoczął badanie funkcji Möbiusa i jej kwadratu, funkcji charakterystycznej liczb całkowitych bezkwadratowych, i przedstawił swoją wciąż otwartą przypuszczenie. Niech $\mathscr{B}(k) = \{b_1, \ldots, b_k\}$ z $b_i < b_j$, jeśli $i < j$ będzie zbiorem k najmniejszych członków $\mathscr{B}$. Łatwo zauważyć, że $\eta_{\mathscr{B}(k)}$ jest punktem okresowym, a $X_{\mathscr{B}(k)}$ jest układem okresowym. Oznaczmy przez ν_k jego jedyną niezmienną miarę. Jako główne zastosowanie Rozdział 3 należy podać następujący wniosek, który wynika z powyższego twierdzenia i twierdzenia Davenporta-Erdősa:

Wniosek 3.4.11-12 (s. 34). Istnieje miara ergodyczna $\nu \in \mathcal{M}_\sigma^e(X_{\mathscr{B}})$, która jest nazywana miarą Mirsky'ego, taka, że $\nu_k \to \nu$ w * -słabej topologii. Ponadto miara Mirsky'ego ma $h(\nu) = 0$, a układ $(X_{\mathscr{B}}, \sigma, \nu)$ ma (racjonalne) widmo dyskretne.

Autor zauważa, że daje to nowy dowód, że miara Mirsky'ego ma racjonalne widmo dyskretne. Byłoby bardzo pomocne, gdyby Autor dodał do tekstu oryginalną definicję miary Mirsky'ego, jaka pojawiła się w pracy El Abdalaoui, Lemańczyka i de la Rue (opartą na szczególnym przypadku w pracy Cellarosiego i Sinaja (2013)) i wyjaśnił, dlaczego miara uzyskana w Wniosku jest rzeczywiście miarą Mirsky'ego. Jest to w rzeczywistości bardzo proste, ale nadal bardzo pomocne. Ponadto porównanie oryginalnego dowodu z nowym dowodem byłoby bardzo dobrze widziane.

Rozdział 4 poświęcony jest *$\bar{d}$-dostępności*, a także *$\bar{d}$-cieniowania* i *$\bar{d}$-stabilności*. Niech A będzie skończonym alfabetem. Zbiór $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest nazywany **podprzesunięciem** nad A, jeśli jest niepusty, domknięty i niezmienny względem przesunięcia. Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem pewnych słów w alfabecie A, oznaczonym jako **zbiór zakazanych słów**. Oznaczmy przez

$X_{\mathcal{F}} \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ zbiór $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że żadne słowa z $\mathcal{F}$ nie pojawiają się w x. Należy zauważyć, że $X_{\mathcal{F}} \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest albo pusty, albo jest podprzesunięciem. Podprzesunięcie X nazywane jest **przesunięciem typu skończonego (SFT)**, jeżeli $X = X_{\mathcal{F}}$ dla pewnego skończonego zbioru zakazanych słów $\mathcal{F}$. Każde podprzesunięcie można przedstawić jako przecięcie ciągu SFT w sposób kanoniczny: niech $\mathcal{F}_n$ oznacza zbiór wszystkich słów w nad A o długości $n+1$, które nie występują w X, wówczas $X = \bigcap_{n\geqslant 0} X_{\mathcal{F}_n}$. Podprzesunięcie $X_n^M := X_{\mathcal{F}_n}$ nazywane jest n-tym **przybliżeniem Markowa** X. W $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definiuje się pseudometrykę $\bar{d}$, używając odległości *Hamminga*:

$$\bar{d}(x,y) = \limsup_{n\to\infty} d_{\mathrm{Ham}}(x_{[0,n)}, y_{[0,n)}).$$

Łatwo zauważyć, że pseudometryka Besicovitcha jest jednostajnie równoważna pseudometryce $\bar{d}$ na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Oznaczmy przez $\bar{d}^H$ pseudometrykę Hausdorffa na przestrzeni zbiorów domkniętych $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ generowana przez $\bar{d}$. Przestrzeń przesunięcia $X \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest nazywana **$\bar{d}$-dostępną** jeśli ciąg jej przybliżeń Markowa $X_1^M, X_2^M, \ldots$ spełnia $\bar{d}^H(X_n^M, X) \to 0$ gdy $n \to \infty$. Głównymi wynikami Rozdziału 4 jest konstrukcja $\bar{d}$-dostępnego proksymalnego podprzesunięcia (Przykład 4.7.1) i $\bar{d}$-dostępnego minimalnego podprzesunięcia (Podsekcja 4.8). Pierwszy przykład jest używany w Rozdziale 5, jak omawiamy poniżej.

W niedawnym artykule Downarowicz i Weiss (2024) rozważali kwestie związane z podniesieniem generycznych punktów faktorów do quasi-generycznych punktów połączeń. Jeden z Ich głównych wyników zakłada słabą własność specyfikacji. W uwadze dodanej w dowodzie piszą: „Podczas sprawdzania dowodów naszego artykułu dowiedzieliśmy się o starym artykule T. Kamae (1976), który zawiera wyniki częściowo pokrywające się z naszymi. Wprowadza on mglistą własność specyfikacji (v.s.p.), na mocy której udowadnia twierdzenie o podniesieniu podobne do naszego. Relacja między v.s.p. a słabą specyfikacją pozostaje do wyjaśnienia". Rozdział 5 całkowicie rozwiązuje ten problem. Rzeczywiście, niech (X,T) będzie topologicznym układem dynamicznym, a ρ kompatybilną metryką na X. Ciąg $\underline{x} \in X^\infty$ nazywamy **asymptotyczną średnią pseudoorbitą dla** T lub **mglistą pseudoorbitą dla** T, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(T(x_i), x_{i+1}) = 0.$$

W rzeczywistości mgliste pseudoorbity zostały zdefiniowane inaczej przez Kamae (1976), ale Autor dowodzi, że podana definicja jest równoważna. Oznaczmy $\underline{x}_T = \{T^n(x)\}_{n\geqslant 0} \in X^\infty$. Topologiczny układ dynamiczny (X,T) ma

własność asymptotycznego średniego cieniowania, jeśli każda asymptotyczna średnia pseudoorbita $\underline{x} \in X^\infty$ dla T jest *śledzona* przez $z \in X$ w tym sensie, że $D_B(\underline{z}_T, \underline{x}) = 0$. Topologiczny układ dynamiczny (X, T) ma **własność mglistej specyfikacji**, jeśli dla każdej mglistej pseudoorbity $\underline{x} \in X^\infty$ dla T istnieje $z \in X$ takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi (względem *gęstości asymptotycznej* $d(\cdot)$)

$$d\left(\{n \in \mathbb{N} : \rho(T^n(z), x_n) < \varepsilon\}\right) = 1.$$

Kamae wspomina, że dyfeomorfizmy Anosowa i topologicznie mieszane podprzesunięcia skończonego typu są przykładami układów o mglistej własności specyfikacji. Głównym wynikiem Rozdziału 5 jest

Twierdzenie 5.3.5 (s. 68). Topologiczny układ dynamiczny (X, T) ma mglistą własność specyfikacji wtedy i tylko wtedy, gdy (X, T) ma własność asymptotycznego średniego cieniowania.

Zaskakujący jest to, że rozprawa nie zawiera definicji słabej własności specyfikacji. Przypomnijmy ją tutaj. Niech $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dowolną funkcją. Rodzina segmentów orbity $\xi = \{T^{[a_j, b_j]}(x_j)\}_{j=1}^n$ jest specyfikacją **ν-odstępną**, jeśli $a_i - b_{i-1} \geqslant \nu(b_i - a_i + 1)$ dla $2 \leqslant i \leqslant n$. Specyfikacja **$N$-odstępna** jest specyfikacją ν-odstępną, gdzie $\nu(n) \equiv N$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Specyfikacja $\xi = \{T^{[a_j, b_j]}(x_j)\}_{j=1}^n$ jest **ε-śledzona** przez $y \in X$, jeśli

$$\rho(T^k(y), T^k(x_i)) \leqslant \varepsilon \quad \text{dla } a_i \leqslant k \leqslant b_i \text{ i } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Układ (X, T) ma **własność specyfikacji**, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje stała $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ taka, że dowolna N-odstępna specyfikacja $\xi = \{T^{[a_j, b_j]}(x_j)\}_{j=1}^n$ jest ε-śledzona przez pewien $y \in X$. Układ dynamiczny (X, T) ma **słabą własność specyfikacji**, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje niemalejąca funkcja $M_\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ z $M_\varepsilon(n)/n \to 0$ jako $n \to \infty$ taka, że każda M_ε-odstępna specyfikacja jest ε-śledzona przez pewien punkt w X. Kwietniak, Łącka i Oprocha (2016) wykazali, że jeśli topologiczny układ dynamiczny ma własność słabej specyfikacji, to ma on własność asymptotycznego średniego cieniowania. W połączeniu z powyższym twierdzeniem daje to:

Wniosek 5.3.7 (s. 69). Jeśli topologiczny układ dynamiczny ma własność słabej specyfikacji, to ma własność mglistej specyfikacji.

Co więcej, Autor pokazuje, że Przykład 4.7.1 wymieniony powyżej ma własność mglistej specyfikacji, ale bez własności słabej specyfikacji. Zatem klasa układów z własnością mglistej specyfikacji ściśle obejmuje klasę układów z własnością słabej specyfikacji. Ponieważ Rozdział 5 jest inspirowany pracą Downarowicza i Weissa (2024), stąd naturalne jest pytanie, czy Ich wyniki udowodnione przy założeniu własności słabej specyfikacji zachodzą przy założeniu własności mglistej specyfikacji. Rzeczywiście Kamae (1976) uzyskał podobne wyniki przy założeniu własności mglisteej specyfikacji. Niestety, to pytanie nie jest omówione w rozprawie.

Konkluzja

Rozprawa jest oparta na artykule opublikowanym w "Ergodic Theory and Dynamical Systems" oraz na dwóch preprintach. Według wykazu czasopism naukowych Ministerstwa Edukacji i Nauki "Ergodic Theory and Dynamical Systems" jest czasopismem o 140 punktach, kategoria do której należą bardzo dobre i doskonałe czasopisma.

Art. 187 ust. 2. *prawa o szkolnictwie wyższym i nauce* stwierdza, że „Przedmiotem rozprawy doktorskiej jest oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, oryginalne rozwiązanie w zakresie zastosowania wyników własnych badań naukowych w sferze gospodarczej lub społecznej albo oryginalne dokonanie artystyczne.".

W moim przekonaniu rozprawa mgra Meliha Emina Cana "Dynamical properties related to the Besicovitch pseudometric" spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. W związku z tym przedkładam Radzie Dyscypliny Matematyka Uniwersytetu Jagiellońskiego wniosek o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie mgra Meliha Emina Cana do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Jonatan Gutman

Jonatan Gutman

Literówki

1. Rozprawa zawiera wiele odnośników bez precyzyjnej lokalizacji. Należy upewnić się, że wszystkie odnośniki mają formę [X, Lemat Y] itp.

2. str. 77. "Michał Rams" zamiast "MichałRams".

3. str. 77. "Besicovitch and Weyl" zamiast "besicovitch and weyl".

4. str. 76. "Feldman-Katok pseudometric and the GIKN construc- tion" zamiast "Feldman-katok pseudometric and the gikn construc- tion".

5. str. 76. "Epperlein, Jeremias, Dominik Kwietniak, and Piotr Oprocha. "Mixing properties in coded systems." New Trends in One-Dimensional Dynamics: In Honour of Welington de Melo on the Occasion of His 70th Birthday IMPA 2016, Rio de Janeiro, Brazil, November 14–17. Springer International Publishing, 2019." zamiast "Jeremias Epperlein, Dominik Kwietniak, and Piotr Oprocha. Mixing properties in coded systems. In New trends in one-dimensional dynamics, volume 285 of Springer Proc. Math. Stat., pages 183–200. Springer, Cham, [2019] ©2019.".

6. str. 75. "Can, Melih Emin, and Alexandre Trilles. "The equivalence of asymptotic average shadowing and vague specification properties and its consequences." arXiv preprint arXiv:2411.01556 (2024)." zamiast "Melih Emin Can and Alexandre Trilles. Asymptotic average shadowing and vague specifica- tion are equivalent. in prepapperration, 2024.".

7. str. 75. "Cellular automata in the Cantor, Besicovitch, and Weyl topological spaces" zamiast "Cellular automata in the cantor, besicovitch, and weyl topological spaces"

8. str. 75. "In preparation" zamiast "in prepapperration".

9. str. 34. Usuwać "By Theorem 2.4.21 there exists a strictly increasing subsequence $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ such that $\lim\limits_{m\to\infty} d^{(n_k)}(\eta_{\mathscr{B}}, \eta_{\mathscr{B}(m)}) = 0$,".

10. str. 75. "Anne Bertrand. Specification, synchronisation, average length." zamiast "Anne Bertrand. Specification, synchronisation, a verage length.".

11. str. 36. "It was proven that" zamiast "It has been stated that".