Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki

dr hab. inż. Jacek Serafin
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Wrocław, 19.01.2025 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Meliha Emina Cana "Dynamical properties related to the Besicovitch pseudometric"

Informacje wstępne.
Rozprawa doktorska mgr. Meliha Cana liczy 77 stron i składa się z pięciu rozdziałów. Została napisana w języku angielskim, pod kierunkiem promotora dra hab. Dominika Kwietniaka oraz promotora pomocniczego dra Borysa Kucy.

Najważniejszą merytorycznie część rozprawy stanowią rozdziały 3,4,5, oparte o współautorskie prace (numeracja zgodna z bibliografią):

3. S. Babel, M. Can, D. Kwietniak, P. Oprocha, Spectrum of invariant measures via generic points, (w przygotowaniu, 2024)

10. M. Can, J. Konieczny, M. Kupsa, D. Kwietniak, Minimal and proximal examples of $\bar{d}$-stable and $\bar{d}$-approachable shift spaces, Ergodic Th. and Dynam. Sys., online, 2024.

11. M. Can, A. Trilles, Asymptotic average shadowing and vague specification are equivalent, (w przygotowaniu, 2024).

Przedstawiony do recenzji materiał jest w miarę spójny; rozprawa mgra Cana dotyczy (w uproszczeniu) badań nad pewnymi własnościami topologicznego układu dynamicznego (X, T) związanymi z klasyczną pseudometryką Besicovitcha D_B, mierzącą średnią odległość między elementami $x, y \in X$ wzdłuż ich orbit zadanych przez iteracje przekształcenia T.

Omówienie wyników.
Poniżej omawiam krótko kolejne rozdziały rozprawy, załączając na bieżąco moje uwagi. Krótki Rozdział 1 ma charakter wstępny, zawiera pewne uwagi historyczne i możliwe motywacje. Autor dość szczegółowo opisuje wyniki uzyskane w rozprawie, pojawiają się nazwy większości pojęć, które odegrają dalej znaczącą rolę; poza tym autor zapowiada niektóre z technik dowodowych, co samo w sobie jest sensownym zabiegiem, generalnie ułatwiającym lekturę. Już jednak w owym krótkim rozdziale pojawiają się dwa irytujące błędy:

- wyrażenie (1.2) powinno zawierać ξ^{-j} a nie ξ^{-1}, w takiej formie każdy punkt generyczny jest punktem generycznym w sensie Wienera-Wintnera
- w definicji (1.4) pseudometryki $\bar{d}$ brakuje warunku $j \leq n$.

Rozdział 2 zawiera spis (podany w sposób chaotyczny i nie zawsze poprawny, o tym napiszę szerzej) pojęć stosowanych w rozprawie, są wśród nich klasyczne pojęcia z teorii ergodycznej oraz dynamiki topologicznej. Wśród najważniejszych pojęć pojawiają się: generyczność w sensie Wienera-Wintnera, pseudometryka Besicovitcha, δ-średnia pseudoorbita dla T, asymptotycznie średnia pseudoorbita dla T, mglista pseudoorbita dla T, własność śledzenia w średniej, własność asymptotycznego śledzenia w średniej, własność mglistej specyfikacji; definiowane są też różne topologie na przestrzeni stanów oraz na przestrzeni miar niezmienniczych. Oto szereg uwag krytycznych, niektóre z nich to uwagi redakcyjne:

- na stronie 6 w średnich ergodycznych raz pojawia się $f \circ T^j(x)$ a po chwili $f(T^j(x))$, dlaczego?
- na stronie 7 okrąg jednostkowy oznaczany jest w dwóch kolejnych liniach symbolami $\mathbb{S}$ oraz $\mathbb{S}^1$, dlaczego?
- w ostatniej linii na stronie 7 definiowana jest średnia ergodyczna Wienera-Wintnera $A_n[f, \bar{\xi}](x)$ jako $\frac{1}{n}\sum_j \xi^{-j} f(T(x))$. Tym razem ξ ma zmienną potęgę, ale brakuje potęgi przy T, więc średnia zależy tylko od ξ!
- strona 8, twierdzenia 2.1.15 oraz 2.1.16 wydają się być ważne w kontekście rozważań w rozdziale 3, niestety pozycja [3] jest nieosiągalna.
- strona 9 linia -16, powinno być (Y, S), a nie (Y, T)
- początek strony 11, uwagi i oznaczenia zbioru miar niezmienniczych: wszystko to było na stronie 5
- strona 12, w definicji X^∞ powinno być $j \in \mathbb{N}$
- strona 12, w Lemacie 2.3.3 mówi się: gdzie $\underline{x} \in X^\infty$, a w definicji D'_B występuje $\underline{x}^{(n)}$
- strona 16, tuż przed definicją 2.4.13, nie rozumiem zdania: we call X can be represented by the graph...
- strona 19, autor definiuje tzw. dziedziczne domknięcie przestrzeni X używając w tym celu pojęcia szyftu dziedzicznego, ale brakuje tu definicji szyftu dziedzicznego (to nie jest pojęcie powszechnie używane, moim zdaniem)
- strona 19, Definicja 2.4.24 tzw. "measure center" jest w zasadzie powtórzona na stronie 19, można ja więc pominąć w rozdziale 2.

W Rozdziale 3 autor dowodzi, że pewne istotne własności układu dynamicznego, takie jak posiadanie spektrum dyskretnego, słabe mieszanie, mieszanie, są zachowane przy przejściu granicznym w metryce Besicovitcha. Ściślej (Twierdzenie 3.4.8): jeśli dany jest ciąg (x_m) punktów generycznych dla miar ergodycznych μ_m, przy czym miary μ_m mają w/w własności oraz granica x ciągu (x_m) w metryce Besicovitcha jest punktem generycznym dla miary μ, to miara graniczna μ posiada odpowiednie własności. Doktorant dowodzi głównego twierdzenia (Tw. 3.4.8) poprzez ciąg pomocniczych lematów i twierdzeń, posługując się w miarę sprawnie pojęciem punktu generycznego, pojęciem połączenia oraz dość standardowymi i dobrze znanymi w układach dynamicznych technikami teorio-miarowymi. Moje uwagi krytyczne:

- pozycja [3] jest niedostepna i bardzo trudno jest zweryfikować wiele z argumentów rozdziału trzeciego, skoro autor powołuje się na [3]
- strona 21, linia -17: autor pisze o metryce uogólniającej pojęcie metryki $\bar{d}$ Ornsteina, podczas gdy na stronie 17 była umowa, że metryka Ornsteina będzie oznaczana przez $\bar{d}_{\mathcal{M}}$, jako, że symbol $\bar{d}$ jest zarezerwowany dla jednej z używanych w rozprawie pseudometryk! Konieczność używania innego symbolu niż $\bar{d}$ jest tłumaczona co najmniej dwukrotnie, a i tak autor nie zawsze przestrzega swoich własnych reguł, co może być irytujące

- strona 22, linia 5: autor pisze "repeating the argument provided in the proof of [20, Th. 21], we see that..."; uważam, że takie "zewnętrzne" rozumowanie powinno się pojawić w rozprawie
- dowód Twierdzenia 3.2.1, pierwsze dwa zdania to dosłowne przepisanie założeń twierdzenia, po co to robić?
- strona 24, linia -12, które rozumowanie autor ma na myśli pisząc: we repeat the reasoning that led us to (3.8)?
- strona 24, Remark 3.2.5: nie jest dla mnie jasne, dlaczego jest istotne i ważne (skoro autor o tym wspomina), że zbiory X_μ oraz X_ν występujące we Wniosku 3.2.4 (2) mogą składać się z regularnych punktów generycznych w sensie Wienera-Wintnera?
- strona 28, linia 8, powtórka pierwszej uwagi dotyczącej rozdziału 1, znów ξ^{-1} zamiast ξ^{-j}
- strona 28, linia -4, tu po raz pierwszy średnie Wienera-Wintnera są napisane poprawnie!
- strona 29, linia -16, nie rozumiem zdania: there exists $N_1 \geq N$ such that for every $n \geq N$...
- strona 29, linia -10, co oznacza: there is $N_1 > N_2$, skoro N_1 już zostało ustalone?
- strona 30, zdanie o ciągu $\{n_k\}$, napisane tuż pod Definicją 3.4.1 jest powtórzeniem tego, co zostało napisane tuż przed Definicją 3.4.1, po co to robić?
- strona 30, zły porządek nawiasów w Definicji 3.4.3
- strona 31, linia 1, nie zgadzam się ze zdaniem: Now we see that...
- strona 31, dowód Lematu 3.4.5, uwaga o jednostajnej równoważności pseudometryk jest niepotrzebna, dowód tego był pół strony wcześniej; symbol 1_B^ϵ nie został zdefiniowany
- strona 31, ostatnia linia, "so is μ" a nie "so does μ"
- strona 32, dowód Lematu 3.4.6: po pierwsze, co tu jest nowego? Po drugie: miara empiryczna była używana w poprzednim lemacie, po co przypominać oznaczenia? Po trzecie: znów mamy sytuację, gdzie autor odwołuje się do zewnętrznego rozumowania, można było je przytoczyć jeśli jest nietrywialne.
- strona 32, Lemat 3.4.7, punkt 2. Co to jest μ'? Ponadto pierwszych sześć linii to trywialne uwagi i powtórzenia.
- strona 33, dowód Twierdzenia 3.4.8 (czyli w zasadzie głównego wyniku tego rozdziału): bardzo niedobrze wygląda "dowód" części 2, czyli "we combine [29, Lemma 25, Thm. 33 and Thm. 41] to obtain 2".
- strona 34, dowód Twierdzenia 3.4.11, dlaczego każdy $X_{\mathcal{B}(m)}$ jest "uniquely ergodic"?
- strona 34, Wniosek 3.4.12, autor mówi o istnieniu miary Mirskiego. Uważam, że powinno się pojawić wcześniej wyjaśnienie czym jest miara Mirskiego.

Rozdział 4 opiera się na publikacji [10], nie będzię więc zaskoczeniem moja opinia, że rozdział ten jest najlepiej zredagowanym spośród wszystkich części rozprawy. Autor rozpatruje tu topologiczne układy dynamiczne specjalnego typu: przestrzenie symboliczne nad skończonym alfabetem z działaniem przesunięcia w lewo (tzw. przestrzenie szyftowe). Doktorant koncentruje swą uwagę na własnościach $\bar{d}$-aproksymowalności, $\bar{d}$-śledzenia pseudoorbit oraz $\bar{d}$-stabilności. Pierwsze dwie własności zostały zdefiniowane przez trzech współautorów doktoranta w niedawno (2023) opublikowanej pracy, w celu lepszego zrozumienia oraz uogólnienia różnych wersji własności specyfikacji; $\bar{d}$-stabilność została zdefiniowana przez Austina. W rozdziale 4 autor prezentuje dowód tego, że własność $\bar{d}$-śledzenia pseudoorbit implikuje $\bar{d}$-stabilność; dowodzi też, że w surjektywnych przestrzeniach symbolicznych z własnością śledzenia pseudoorbit pseudometryka Hausdorffa $\bar{d}^H$ pomiędzy przestrzeniami symbolicznymi pokrywa się z metryką Hausdorffa $\bar{d}^H_{\mathcal{M}}$ pomiędzy sympleksami miar niezmienniczych, bez własności śledzenia pseudoorbit powyższa relacji nie zachodzi. Ponadto doktorant prezentuje przykłady minimalnych przestrzeni symbolicznych oraz proksymalnych przestrzeni symbolicznych z własnością $\bar{d}$-aproksymalności; oba przykłady są uzyskane jako przekroje ciągów symbolicznych przestrzeni soficznych o pewnych dodatkowych własnościach, konstrukcje są bardzo pomysłowe i istotnie nietrywialne. Moje uwagi dotyczące rozdziału 4:

- skoro sposób wprowadzenia własności $\bar{d}$-stabilności przez Austina ma status "personal communication", może warto byłoby wyjaśnić, dlaczego pojęcie to jest ważne?
- strona 38, linia 13, nie zostało nigdzie wprost powiedziane co to znaczy, że punkt z' może być śledzony przez z'' (choć można się domyślić co to oznacza)
- Proposition 4.2.6 nie powinna się w ogóle pojawić
- koniec strony 39 oraz strona 40, pojawia się pojęcie sympleksu Poulsena, warto byłoby przypomnieć definicję
- strona 40, linie 5,6, co autor ma na myśli pisząc: "the midpoint $\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ of the convex combination of two measures μ_1 and μ_2..."?
- strona 40, po Wniosku 4.2.10, czy autor może podać bardziej nietrywialny przykład niż ten przytoczony?
- strona 41, linie 1,2, prezentowanie tak trywialnych rachunków nie przystoi w rozprawie doktorskiej
- strona 41, linie 23,24, niedobrze aby czytelnik był zmuszony do lektury [26, Prop. 12], aby przekonać się, jaka nierówność staje się równością, przy założeniu, że układy mają własność $\bar{d}$-śledzenia pseudoorbit
- strona 41, dowód Twierdzenia 4.3.1, po co zamieszczać (na prawie połowie strony) szkic dowodu, skoro sam dowód, choć pomysłowy, nie jest przesadnie długi?

Rozdział 5 oparty jest o preprint [11]. Autor bada w nim relacje pomiędzy różnymi wersjami pojęcia pseudoorbity oraz różnymi wariantami własności śledzenia pseudoorbit. Do głównych wyników tej części rozprawy zaliczyć można Twierdzenie 5.2.11 mówiące, że ciąg jest mglistą pseudoorbitą wtedy i tylko wtedy gdy jest pseudoorbitą asymptotyczną w średniej. W dowodzie wykorzystuje się szereg lematów i twierdzeń pomocniczych, z których jedynie o Lemacie 5.2.8 można powiedzieć, że jego (tego lematu) dowód nie jest trywialny. Dowody np. Prop. 5.2.3, Prop. 5.2.5, Lematu 5.2.9, Lematu 5.2.10 są banalne i polegają na prostych manipulacjach pojęciami domkniętości, zwartości oraz definicjami pseudoorbit. W podrozdziale 5.3 autor przygląda się związkom pomiędzy trzema wariantami śledzenia pseudoorbit. Używając wprowadzonego wcześniej, naturalnego pojęcia zupełności w sensie Besicovitcha, autor dowodzi (Twierdzenie 5.3.4), że dla układów surjektywnych asymptotyczne śledzenie w średniej jest równoważne śledzeniu w średniej, przy założeniu zupełności w sensie Besicovitcha. Kolejny wynik (Twierdzenie 5.3.5) mówi, że własność mglistej specyfikacji układu topologicznego jest równoważna własności asymptotycznego śledzenia w średniej. Niestety, dowody obu twierdzeń to bardzo prosty ciąg manipulacji przeróżnymi definicjami. Podrozdział 5.3 zawiera też dyskusję o relacji własności śledzenia w stosunku do własności słabej specyfikacji. Ogólnie wiadomo, że słaba specyfikacja implikuje asymptotyczne śledzenie w średniej, więc implikuje (w świetle Tw.

5.3.5) mglistą specyfikację. Doktorant uzasadnia (Wniosek 5.3.10), że mglista specyfikacja nie implikuje słabej specyfikacji. Niestety, argument opiera się o niezdefiniowane w rozprawie pojęcie własności prawie specyfikacji oraz o zewnętrzne wyniki mówiące, że słaba specyfikacja oraz prawie specyfikacja są pojęciami niezależnymi. Moją bardzo krytyczną ocenę Rozdziału 5 łagodzi ciekawa i nietrywialna konstrukcja układu proksymalnego z własnością mglistej specyfikacji (Przykład 5.4.2, Twierdzenie 5.4.3 i Wniosek 5.4.4).

Podsumowanie.

W mojej opinii przedstawiona rozprawa doktorska, nawet biorąc pod uwagę przytoczone powyżej uwagi krytyczne, rozszerza wiedzę na temat własności topologicznych układów dynamicznych oraz zbiorów miar niezmienniczych stowarzyszonych z tymi układami. Zawarte w rozprawie wyniki dotyczące związków i relacji pomiędzy różnymi własnościami śledzenia pseudoorbit znajdują się w kręgu zainteresowań szerokiego grona matematyków.

Konkluzja.

Uważam, że rozprawa doktorska mgr. Meliha Emina Cana, "Dynamical properties related to the Besicovitch pseudometric", spełnia wymagania ustawowe stawiane rozprawom doktorskim, zgodnie z Art. 187 pkt 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce.* Wnoszę o dopuszczenie mgra Meliha Cana do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Jacek Serafin

Jacek Serafin