UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

Warszawa, 16. września 2024 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Jakuba Banaśkiewicza pt.
Periodic orbits for dissipative PDEs – computer assisted approach

Rozprawa mgra Banaśkiewicza jest poświęcona komputerowo wspomaganemu badaniu równań różniczkowych cząstkowych a zwłaszcza istnieniu rozwiązań okresowych i ich stabilności. Jest to ciekawy i ważny obszar badawczy, z uwagi na to, że daje wgląd w układy, które są ważne ale trudne do analizy jedynie za pomocą papieru i ołówka. Dokładniej, autor rozprawy zajmuje się układem Brusselatora

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} - (B+1)u + u^2 v + A\sin x, & (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty), \\ v_t = d_2 v_{xx} + Bu - u^2 v, & (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty), \\ u(x,t) = v(x,t) = 0, & (x,t) \in \{0,\pi\}\times(0,\infty), \\ u(0,x) = u^0(x), \quad v(0,x) = v^0(x), & x \in (0,\pi) \end{cases} \tag{1}$$

i równaniem Chafee-Infante

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda u - b(t)u^3, & (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \{0,\pi\}\times(0,\infty), \\ u(0,x) = u^0(x), & x \in (0,\pi). \end{cases} \tag{2}$$

W pracy są dwa zasadnicze wyniki:
Twierdzenie 1.1 Jeśli $d_1 = 0,2$, $d_2 = 0,02$, $A = 1$, $B = 2$, to układ Brusselatora ma okresowe rozwiązanie o okresie $T \in [7,69666, 7,69667]$.

Ten wynik został opublikowany w pracy [5] (numeracja za rozprawą), napisanej wspólnie z promotorem i P.Zgliczyńskim.

Drugi wynik to:
Twierdzenie 1.2 Jeśli $\lambda = 2$, $b(t) = \frac{3}{2}\sin(2\pi t) + 1$, to równanie Chafee-Infante ma orbitę okresową $u^*(t,\cdot) : \mathbb{R} \to C_0$ o okresie 1. Co więcej, istnieją $\delta > 0, D > 0, \kappa > 0$ takie, że dla dowolnego $t_0 \in \mathbb{R}$ i ciągłych danych początkowych u^0 spełniających $\|u^*(t) - u^0\|_{C_0} \le \delta$ istnieje rozwiązanie $u : [t_0,\infty) \to C_0$, spełniające $u(t_0) = u^0$

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 429
e-mail: rybka@mimuw.edu.pl

takie, że

$$\|u^*(t) - u(t)\|_{C_0} \leq De^{-\kappa(t-t_0)}\|u^*(t) - u^0\|_{C_0}, \qquad \text{dla } t \geq t_0.$$

W rozprawie są jeszcze rozszerzenia obu wyników. Bardzo wysoko oceniam twierdzenia 1.1 i 1.2 jak i ich rozszerzenia.

Sama rozprawa ma bardzo dobrą konstrukcję. Mianowicie, wstęp, czyli pierwszy rozdział, zwięźle przedstawia tło, metody oraz wyniki. Zasadnicze metody pracy zostały wprowadzone w postaci narracji, pomijającej szczegóły techniczne. Wyniki pomocnicze zostały zgrupowane w ostatnim rozdziale. Dzięki temu czytelnik może szybko prześledzić zasadniczą myśl, nie będąc rozpraszanym szczegółami technicznymi.

Rozdział drugi jest wykładem materiału pomocniczego, niezbędnego do przedstawienia zasadniczych wyników. W szczególności jakby mimochodem pojawia się tu pojęcie półgrupy operatorów. Jednakże autor odsyła do innych prac po konstrukcje rozwiązań równania ciepła i operatora dyfuzji czwartego rzędu. Jednocześnie autor wskazuje, że interesują go rozwiązania oparte na rozwinięciach w szeregi Fouriera. Dla kogoś pracującego z półgrupami operatorów ten rozdział zostawia odczucie niedosytu. Przykładowo, chciałoby się zobaczyć w rozprawie ogólny argument gwarantujący spełnienie warunku (BL2).

Rozdział trzeci traktuje o nieliniowych równaniach różniczkowych w przestrzeniach Banacha i kładzie podwaliny pod dowody zasadniczych wyników. Formułowane są założenia, które zbiorczo oznaczę (B*), jakie musi spełniać półgrupa i nieliniowość, aby zagwarantować istnienie 'łagodnego rozwiązania' (and. mild solution), które jest rozwiązaniem równania całkowego, będącego wzorem na uzmiennianie stałych. Zasadniczo takie podejście jest dobre. Brakuje mi jednak odwołania do ogólnej teorii, która zapewniłaby spełnienie (B*) i zagwarantowała istnienie łagodnych rozwiązań.

Następnie, autor pokazuje, że warunki (B*) są spełnione przez (1) i (2) w przestrzeni L^2, umożliwiającej wygodną pracę z szeregami Fouriera. Jednocześnie autor pokazuje, że przedstawiona teoria działa także dla równania Kuramoto-Sivashinsky'ego (KS). Autor wprowadza do gry równanie KS po to, aby pokazać, że wprowadzona teoria zagadnień nieliniowych jest na tyle bogata, że obejmuje inne zagadnienia, pozostające poza głównym nurtem rozprawy. Cieszy mnie takie podejście.

W podrozdziale 3.5 autor przedstawia kluczową metodę teoretyczną, jaką jest tzw. równanie wariacyjne. Można je określić jako układ pozwalający jednocześnie śledzić badany układ i jego linearyzację. Jest to istotne z numerycznego punktu widze-

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 429
e-mail: rybka@mimuw.edu.pl

nia, bo pozwala na panowanie nad pochodną rozwiązania. Następnie autor wyprowadza równanie wariacyjne dla (2), co jest kluczowe dla dowodu twierdzenia 1.2, i dla równania KS.

Rozdział czwarty przedstawia algorytmy dokładnego całkowania równań różniczkowych. Warto nadmienić, że metody oparte na dyskretyzacji równań w typowym przypadku dają oszacowanie globalnego błędu dyskretyzacji w postaci iloczynu lokalnego błędu dyskretyzacji i czynnika wykładniczego. W przeciwieństwie do nich arytmetyka interwałowa pozwala na dokładne panowanie nad błędem, tj. utrzymanie go w zadanym przedziale. W tym celu zbiory danych reprezentowane są za pomocą nieskończonych wektorów przedziałów, $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$, gdzie przedział domknięty V_i jest zakresem zmienności i-tego modu Fourierowskiego albo i-tej współrzędnej w wybranej bazie ortonormalnej. Autor z konieczności pracuje ze skończoną liczbą modów, pozostałe musi umieć ograniczyć. Biorąc pod uwagę to, że V_i jest zakresem zmienności i-tej współrzędnej w bazie ortonormalnej autor narzuca odpowiednio szybki zanik ich długości.

Podkreślam, że kluczowym jest szacowanie ewolucji zbiorów danych, bo istnienie orbit okresowych będzie uzyskane za pomocą metod topologicznych, tj. twierdzeń o punkcie stałym.

Do tego, aby zdobyć dokładną wiedzę o ewolucji zbiorów, przydatne jest angielskie pojęcie *enclosure*, które można oddać jako *ogrodzenie*. Dodam na marginesie, że zbiór $X([t_0, t_0 + \tau])$ przestrzeni fazowej jest ogrodzeniem X^0 o ile dla każdego $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ potok układu przeprowadza X^0 w $X([t_0, t_0 + \tau])$.

Cały podrozdział 4.5 jest poświęcony abstrakcyjnemu podejściu do konstrukcji ogrodzeń. Konstrukcja wymaga oszacowań splotów szeregów współczynników Fouriera. Co wymaga wysiłku technicznego. Zwracam też uwagę, że konstrukcja ogrodzenia wymaga rozwiązywania inkluzji różniczkowych. W tym przypadku autor posiłkuje się znanymi wynikami.

Jednocześnie autor stwierdza, że zawsze istnieje ogrodzenie dla danych równania (1) o ile mody Fourierowskie danych dostatecznie szybko zanikają. Podobnie autor zauważa istnienie ogrodzenia dla układu wariacyjnego równania Chafee-Infante, ale nie jest to dalej wykorzystywane.

Rozdział piąty zawiera wspomagany komputerowo dowód istnienia okresowej orbity równania (1) i uważam go za najciekawszy. Idea jest prosta: znaleźć punkt stały odwzorowania Poincarégo. Dzięki zastosowaniu arytmetyki interwałowej autor może stosować abstrakcyjne metody topologiczne, takie jak twierdzenia o punk-

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 429
e-mail: rybka@mimuw.edu.pl

cie stałym. W przypadku równania Brusselatora autor wykorzystuje twierdzenie Schaudera o punkcie stałym. Abstrakcyjny wynik jest treścią twierdzenia 5.2 natomiast konkretna treść jest przedstawiona w podrozdziałach 5.3, 5.4 i 5.5. W dwóch pierwszych zawarte są dwa obliczeniowe kroki konstrukcji odwzorowania Poincarégo. Podrozdział zawiera konkretne wartości parametrów równania (1), dla których spełnione są założenia abstrakcyjnych twierdzeń.

Rozdział szósty jest rozszerzeniem wyników poprzedniego na inne wartości parametrów. Trochę żałuję, że te wyniki nie zostały uznane za główne na równi z twierdzeniem 1.1.

Rozdział siódmy przedstawia wyniki teoretyczne i obliczeniowe stabilności orbit okresowych równania (2). Podkreślam, że zostały samodzielnie uzyskane przez kandydata i są nie mniej wartościowe niż te z poprzedniego rozdziału. Wyniki teoretyczne są częściowo oparte na wcześniejszych rozdziałach. Zwracam uwagę na trudność w tym zagadnieniu, wynikającą z tego, że zależny od czasu współczynnik b może mieć 'zły znak', tj. ujemny, który może prowadzić do wybuchu rozwiązania.

Zasadniczym abstrakcyjnym pomysłem stojącym za analizą tego rozdziału jest spostrzeżenie, że do stabilności orbity okresowej wystarczy sprawdzić, że norma pochodnej odwzorowania Poincarégo jest mniejsza od jedności. Taki fakt zazwyczaj jest trudny do teoretycznego wykazania. Natomiast pan Banaśkiewicz stwierdza to za pomocą komputera.

Ostatni rozdział zawiera pomocnicze fakty, takie jak oszacowania współczynników Fouriera iloczynu funkcji, wykorzystywane w arytmetyce interwałowej. Są też inne wyniki, które racjonalnie jest przenieść z głównego wątku narracji do pobocznego.

Ciekawym aspektem rozprawy jest to, że wprowadza ona abstrakcyjne ramy, pozwalające na wyciąganie wniosków o istnieniu rozwiązań okresowych i ich stabilności. Jednakże dowód spełnienia tych założeń dla określonych wartości parametrów w (1) i (2) jest czysto obliczeniowy. Bez odpowiedniego oprogramowania czytelnik nie jest zdolny sprawdzić poprawność obliczeń.

Oceniając pracę bardzo wysoko, zwracam uwagę, że nowe wyniki uzyskane przez autora dla równań (1) i (2) biorą się z dostosowania ogólnych metod do szczególnych równań. Ta praca potrafi być mozolna. Ponieważ autor podaje bardzo konkretne wartości parametrów, to chciałbym dowiedzieć ew jaki sposób autor doszedł to ich wartości prowadzących do dowodu twierdzeń 1.1 i 1.2.

Ponieważ rozprawa do pewnego stopnia na charakter eksperymentalny, to ciekawe jest porównanie wyników autora z eksperymentami opisanymi w literaturze.

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 429
e-mail: rybka@mimuw.edu.pl

Okazuje się, że autor zdołał potwierdzić wyniki Arioli, patrz [1].

Bardzo mnie ucieszyło, że autor przeprowadził serię eksperymentów wskazujących na bifurkację podwojenia okresu w przypadku równania Brusselatora. Bo pytanie o możliwe bifurkacje samo się narzuca.

Komentując twierdzenia 1.1 i 1.2 dodam, że samo ich sformułowanie rodzi serię dalszych pytań:

1. Co stało za wyborem takich a nie innych parametrów i funkcji b w równaniach (1) i (2)?
2. Co się stanie z wynikami, jeśli mało zaburzymy wspomniane parametry?
3. Czy autor planuje podobną analizę innych ważnych równań?

Spodziewam się, że będą te pytania podjęte w dalszej pracy badawczej autora.

Rozprawa została napisana starannie. Ponieważ jej językiem jest angielski, to nie będę komentował strony językowej, poza jednym wyjątkiem. Mianowicie pojawiają się w pracy literówki. Nie powinny się pojawiać, jeśli wziąć pod uwagę powszechną dostępność programów do auto-korekty.

W ostatecznym rachunku bardzo wysoko oceniam rozprawę mgra Jakuba Banaśkiewicza. W moim odczuciu spełnia ona wymagania zwyczajowe i normy ustawowe i wnoszę o dopuszczenie kandydata do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

Piotr Rybka

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 429
e-mail: rybka@mimuw.edu.pl