dr hab. Andrzej Raczyński
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Wrocław, 23.09.2024

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Jakuba Banaśkiewicza

pod tytułem

Periodic orbits for dissipative PDEs - computer assisted approach

Przedstawiona rozprawa doktorska mgra Jakuba Banaśkiewicza została przygotowana na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie. Promotorem rozprawy jest prof. dr hab. Piotr Kalita. Praca została napisana w języku angielskim i liczy blisko 70 stron.

Rozprawa koncentruje się na wykazaniu, przy zastosowaniu dowodów wspomaganych komputerowo, istnienia orbity okresowej dla dwóch typów równań: układu Brusselatora oraz równania Chafee-Infante, a także na analizie niektórych własności tej orbity.

Rozprawa składa się z ośmiu rozdziałów. Pierwszy rozdział ma charakter wstępny i zawiera opis głównych wyników dysertacji. Autor przedstawia w nim nie tylko wyniki swojej pracy, ale również szersze tło i idee stojące za metodami stosowanymi w pracy – dowodami wspomaganych komputerowo. Wstęp ten wskazuje na szeroką wiedzę autora i pozwala czytelnikowi zorientować się w układzie pracy oraz umiejscowić wyniki doktoranta na tle współczesnych badań w tej dziedzinie.

Kolejne trzy rozdziały stanowią przypomnienie kluczowych i stosowanych w pracy definicji i twierdzeń z analizy funkcjonalnej, równań różniczkowych (układów dynamicznych) ze szczególnym uwzględnieniem nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych w przestrzeniach Banacha oraz ich ujęcia w kontekście rozpatrywanych zagadnień: układu Brusselatora oraz nieautonomicznego równania Chafee-Infante. Autor przypomina również konieczne definicje i fakty dla pomocniczego równania wariacyjnego. Rozdział czwarty zawiera opis stosowanego dotychczas C^0 algorytmu of rygorystycznego całkowania równań (*rigorous integration*) oraz jego modyfikacji w postaci C^1 algorytmu. Dodatkowo ostatni, ósmy rozdział zawiera dowody technicznych lematów użytecznych w stosowanych oszacowaniach oraz kontrolujących wielkość współczynników w szeregach Fouriera.

Zasadnicze wyniki rozprawy zawarte są w rozdziałach 5-7 i dotyczą komputerowo wspomaganego dowodu istnienia trajektorii okresowej w układzie Brasselatora (rozdział 5, 6), analogicznego wyniku dla nieautonomicznego równania Chafnee-Infante wraz z określeniem zakresu warunków początkowych, dla których orbita ta jest przyciągającą. Dodatkowo autor implementuje dla tego zagadnienia C^1 algorytm rygorystycznego całkowania (do tej pory nie stosowany w tym kontekście).

Uzyskane w rozprawie wyniki otrzymano stosując metody topologiczne do generowanych przez układy równań różniczkowych potoków, tak, by móc wykazać istnienie punktu stałego odwzorowania Poincaré. Znalezienie punktu stałego, będące wynikiem analizy ciągu podzbiorów odpowiednich przekrojów Poincaré, pozwala wnioskować o istnieniu trajektorii okresowej i jej w miarę dokładnym wskazaniu.

Jeden z kluczowych elementów komputerowo wspomaganego dowodu opiera się na weryfikacji założeń twierdzeń (m.in. wyboru zbioru warunków początkowych) przy zachowaniu w trakcie stosownych obliczeń rygorów arytmetyki przedziałowej (*rigorous numerics*). W obliczeniach uwzględnić należy również skończoną reprezentowalność liczb rzeczywistych oraz oszacowania błędów występujących przy rozwiązywaniu równań różniczkowych metodami numerycznymi.

Autor w swoich obliczeniach oparł się na bibliotekach CAPD - rozwijanych przez działającą na Uniwersytecie Jagiellońskim grupę Computer Assisted Proofs in Dynamics (pozycja [9] w bibliografii), a kody programów w $C++$ użytych do obliczeń dostępne są w otwartym repozytorium GitHub (pozycje [15] i [16]).

Konstrukcja pracy jest logiczna i umożliwia śledzenie prowadzonych rozumowań (choć momentami szerszy opis byłby bardziej przyjazny dla mniej doświadczonego czytelnika) wraz ze sposobem ich implementacji do algorytmów, wskazując na wysoki poziom wiedzy merytorycznej i technicznej autora.

Wyniki rozprawy. Pierwsza część rozprawy dotyczy zagadnienia Brusselatora, tzn. badany jest układ:

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} - (B+1)u + u^2 v + A\sin(x) & \text{dla} \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ v_t = d_2 v_{xx} + Bu - u^2 v & \text{dla} \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(t,x) = v(t,x) = 0 & \text{dla} \quad (x,t) \in \{0,\pi\} \times (0,\infty), \\ u(0,x) = u^0(x), v(0,x) = v^0(x) & \text{dla} \quad x \in (0,\pi). \end{cases}$$

modelujący reakcje chemiczne pomiędzy substancjami u, v, A, B, gdzie wielkości A i B są dane, a poszukiwane jest stężenie substancji u i v. Trudność analizy takiego zagadnienia, zarówno od strony analitycznej jak i numerycznej, leży w uwzględnieniu zjawiska dyfuzji obu substancji (nie są one już rozłożone jednorodnie w przestrzeni), która dodatkowo odbywa się z różnymi prędkościami. Dodatkowe, istotne, trudności powodowane są przez nieliniowość u^2v oraz składnik $A\sin x$ pierwszego równania.

Rozwiązania szukane są w postaci szeregów Fouriera (z uwagi na warunki Dirichleta, w rozwinięciu rozwiązania pojawiają się tylko składniki z sinusami) i opierają się na rozkładzie przestrzeni na dwie podprzestrzenie – skończenie wymiarowej w której dokonujemy „dokładnych” obliczeń oraz jej dopełnienia, w której jesteśmy w stanie kontrolować wielkość współczynników rozwinięcia rozwiązania (wielomianowe malenie współczynników dla wszystkich czasów) i ich wpływ na całe rozwiązanie.

Zasadniczym problemem podejmowanym przez doktoranta jest wykazanie istnienia orbity okresowej dla tego zagadnienia dla pewnych wartości współczynników. Jako główny wynik doktorant wskazuje twierdzenie, mówiące, że dla parametrów równych $d_1 = 0.2, d_2 = 0.02, A = 1$, and $B = 2$, układ Brusselatora ma rozwiązanie okresowe, o okresie $T \in [7.69666, 7.69667]$.

Dowód istnienia orbity okresowej dla głównego twierdzenia w tej części oparty jest na twierdzeniu Schaudera, a w szczególności na Twierdzeniu 5.2, którego założenia specyfikują listę warunków koniecznych do istnienia orbity okresowej. Warunki te związane są z odpowiednią konstrukcją odwzorowania Poincaré P oraz dobraniem takiego zwartego zbioru warunków początkowych X_0 (z podziałem na wspomniane wcześniej podprzestrzenie), by zachodziło zawieranie $P(X_0) \subset X_0$. Dla konstrukcji odwzorowania Poincaré i weryfikacji wspomnianego zawierania istotne jest znalezienie numerycznego przybliżenia trajektorii okresowej (w przestrzeni skończeniewymiarowej) – autor stosuje tutaj metodę rzutowania Galerkina. I do tak znalezionej aproksymacji stosuje opisany w pracy algorytm weryfikacji zawierania zbiorów.

Rozdział 5 zawiera również dodatkowe oszacowania zarówno supremum po czasie normy L^2 rozwiązania okresowego i jego pochodnej, jak również oszacowania różnicy między rozwiązaniem z danymi warunkami początkowymi a rozwiązaniem okresowym.

W Rozdziale 6 doktorant przedstawia analogiczne twierdzenia dotyczące istnienia orbit okresowych dla innych zestawów parametrów. Co istotne, niektóre zestawy parametrów potwierdzają osiągnięte przez innych badaczy (innymi metodami) wartości numeryczne rozwiązań (vide [1]). Kolejne zestawy parametrów obrazują charakter zmian zachowania rozwiązania przy zmianie parametrów.

Dla pierwszego zestawu parametrów $(\mathcal{A}_1)$ otrzymane wyniki sugerują jaki wpływ ma wzrost wartości parametru B na wymiar wybieranej skończeniewymiarowej podprzestrzeni.

Drugi zestaw parametrów $(\mathcal{A}_2)$ pozwala w miarę dokładnie uchwycić, zaobserwowany przez Ariolę ([1]), moment bifurkacji przy zmianie wartości parametru B z 2,83 na 2,84. Przedstawione przykłady numerycznych rozwiązań okresowych wskazują na podwajanie okresu przy przejściu przez punkt bifurkacji.

Rozwiązania numeryczne dla trzeciego zestawu parametrów $(\mathcal{A}_3)$ pokazują, że manipulując odpowiednio równymi współczynnikami dyfuzji, można numerycznie potwierdzić pojawianie się dwuwymiarowego przyciągającego torusa, co potwierdza wyniki osiągnięte w pracy Dernova ([19]).

Drugim zagadnieniem rozpatrywanym w rozprawie jest równanie Chafee-

Infante:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda u - b(t)u^3 & \text{dla} \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (t_0, \infty), \\ u(t,x) = 0 & \text{dla} \quad (x,t) \in \{0,\pi\} \times (t_0,\infty), \\ u(t_0,x) = u^0(x), & \text{dla} \quad x \in (0,\pi), \end{cases}$$

Głównym rezultatem w tej części jest udowodnienie istnienia trajektorii okresowej (o okresie 1) dla następujących par $(\lambda, b(t))$: $(2, \frac{1}{2}\sin(t)+1)$, $(2, \frac{3}{2}\sin(t)+1)$, $(5, \frac{3}{2}\sin(t)+1)$. Dodatkowo autor wykazuje zbieżność rozwiązania z zadanym warunkiem początkowym do rozwiązania okresowego wraz ze wskazaniem tempem zbieżności.

Metody stosowane w dowodzie są zbliżone do tych stosowanych przy układzie Brusselatora (z zastąpieniem odwzorowania Poincaré odwzorowaniem przesunięcia) a do wykazania przyciągania orbity okresowej użyto modyfikacji C^1 algorytmu, dotychczas nie stosowanego w tym kontekście.

O ile rezultaty uzyskane dla $b(t) > 0$ potwierdzają wyniki innych autorów ([12]), to szczególnie interesująco wyglądają wyniki dla $b(t)$ zmieniającego znak, głównie z uwagi na brak wcześniejszych rezultatów, w tym dotyczących istnienia globalnych rozwiązań dla tego zagadnienia.

Ocena dysertacji. Dysertacja ta wpisuje się w ciąg prac rozwijających pomysły i idee dowodów wspomaganych komputerowo, a zainicjowanych pracami prof. Zgliczyńskiego i jego badaniami nad równaniem Kuramoto-Shivashinsky'ego.

W pracy zawarto nowe wyniki, z których te, dotyczące układu Brusselatora, opublikowane zostały wcześniej we wspólnej pracy z promotorem i prof. Piotrem Zgliczyńskim ([5]). Współautorzy zgodnie podkreślają kluczowy dla osiągniętych wyników wkład doktoranta, swój udział szacując na 10 %.

Na uznanie liczyć powinna wprawa, z jaką doktorant posługuje się zaawansowanym aparatem matematycznym oraz informatycznym.

O technicznych umiejętnościach autora rozprawy świadczy zastosowanie rozwijanych wcześniej metod (*rigorous forward intergration*), stosowanych dotychczas głównie do równań, do układów równań, a zwłaszcza do tak trudno poddających się analizie jak układy tzw. *slow-fast*. Dodatkowym utrudnieniem jest stopień nieliniowości – sześcienny, podczas gdy dotychczasowe rezultaty tyczyły nieliniowości kwadratowych. Doktorant, opierając się na wcześniejszych pracach ośrodka krakowskiego otwiera nowe, potencjalne pole zastosowań znanych metod.

Za szczególnie cenny wynik uznać należy dowody istnienia rozwiązań dla równania Chafnee-Infante dla funkcji $b(t)$ zmieniających znak. Wykazanie istnienia rozwiązania w postaci orbity okresowej wydaje się nie mieć odpowiednika w dotychczasowej literaturze przedmiotu.

Stosowane metody nie tylko mogą służyć potwierdzaniu wyników osiągniętych innymi metodami, lecz również wnosić istotny wkład w wiedzę o naturze rozwiązania. Przykładem może być równanie Chafnee-Infante dla $b(t) = \frac{1}{2}\sin t + 1$, gdzie istnienie rozwiązań było znane, lecz wyniki doktoranta pozwalają oszacować tempo zbieżności do rozwiązania stacjonarnego, nieznane dotychczas w literaturze.

Pod względem redakcyjnym rozprawa jest zredagowana bardzo dobrze. Misprinty są nieliczne i nie utrudniają zapoznania się z koncepcją wywodu autora. Rezultaty pracy są sformułowane w sposób klarowny. Chyba jedynie wyniki dotyczące istnienia rozwiązań w układzie Brusselatora dla parametrów $\mathcal{A}_3$ nie przybrały formy lematu (jak to ma miejsce dla poprzednich zestawów, a zostały omówione pokrótce w tekście. Dowody twierdzeń są przedstawione dość jasno, choć momentami dość skrótowo (jak chociażby zadeklarowanie tylko, że z twierdzenia Schaudera wynika istnienie rozwiązania, bez chociażby wykazania, że spełnione są założenia).

Oczywiście, z racji samych stosowanych metod, dysertacja zawiera w dużej mierze konstrukcje rozwiązań dla danych zestawów parametrów i trudno oczekiwać wyników będących odpowiednikami analizy rozwiązań w zależności od ciągłej zmiany parametru.

Z drobiazgów, zabrakło mi niekiedy wyjaśnienia, czym podyktowany jest taki, a nie inny wybór parametrów, a także czym powodowany jest wybór dokładności podania wartości parametrów (liczby miejsc po przecinku). Czy są to ograniczenia natury technicznej (np. czas obliczeń) czy też innego rodzaju? Przykładowo, w zagadnieniu Brusselatora punkt bifurkacji możemy oszacować z dokładnością do jednej setnej, a zapewne ciekawym pytaniem byłoby, jak precyzyjnie możemy określić tę wartość. Te drobne uwagi nie zmieniają oczywiście dobrego odbioru całej rozprawy.

Konkluzja. Recenzowana rozprawa doktorska wnosi istotny oryginalny wkład do rozwoju równań różniczkowych. Zawiera wyniki, których otrzymanie wymagało zaawansowanej wiedzy oraz prezentuje wysoki poziom merytoryczny i bez wątpienia spełnia w tym zakresie wszelkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim w dyscyplinie Matematyka.

Andrzej Rzepnicki