Adam Bobrowski
Katedra Matematyki
Wydziału Elektrotechniki i Informatyki
Politechniki Lubelskiej

18 grudnia 2024

Opinia o pracy doktorskiej pana magistra Jakuba Banaśkiewicza

Recenzję wypada mi rozpocząć od przeprosin: wyjazdy zagraniczne z napiętym programem naukowym i późniejsze trzytygodniowe zwolnienie lekarskie sprawiły, że siadam do niej późno, zapewne jako ostatni z opiniodawców.

Przedstawiona mi do oceny rozprawa została napisana pod kierunkiem dr. hab. Piotra Kality i nosi tytuł *Periodic orbits for dissipative PDEs — computer assisted approach.* Jej głównym wynikiem są twierdzenia o istnieniu orbit okresowych dla dwóch równań różniczkowych cząstkowych, które łączy fakt, że mają nieco podobną strukturę: oba są równaniami półliniowymi, a dokładniej *równaniami reakcji–dyfuzji.* Podobne w obu przypadkach jest też specyficzne podejście do zagadnienia, autorzy (doktorant i jego promotor) dowodzą bowiem swoich wyników zgrabnie łącząc metody analityczne z obliczeniowymi, o czym nieco szerzej będę miał okazję napisać niżej.

1 Brukselski model oscylatora

Pierwsze z ww. twierdzeń poświęcone jest w istocie nie jednemu równaniu, a ich układowi, w literaturze anglojęzycznej znanemu jako *Brusselator.* Nazwa ta jest zbitką dwóch wyrazów: *Brussels* i *oscilator* — wzięła się ona stąd, że model pierwotny, wyrażony w języku równań różniczkowych zwyczajnych, opisywał oscylacje w modelu autokatalizy, a powstał w Brukseli. Jego rozważany w recenzowanej pracy wariant uwzględnia możliwość losowego przemieszczania się związków chemicznych w przestrzeni, tu widzianej jako odcinek, i stąd przyjmuje postać układu równań różniczkowych cząstkowych. Te losowe przemieszczenia, to znaczy dyfuzję, opisuje operator Laplace'a z warunkami brzegowymi typu Dirichleta, natomiast reakcje chemiczne — człony nieliniowe.

Pierwsze główne twierdzenie rozprawy (tw. 1.1) mówi o tym, że tak uogólniony brukselski układ oscylatora — z bardzo konkretnie dobranymi współczynnikami dyfuzji oraz dwoma innymi parametrami — ma orbitę[1], której okres autorzy są w stanie oszacować z góry i z dołu. Podkreślić tu należy, że nie

[1]Tak więc model uogólniony w swej naturze nie tak bardzo odbiega od pierwotnego.

stwierdza się tu istnienia ww. rozwiązania dla jakiegoś zakresu parametrów, lecz dla jednego, bardzo szczególnego ich doboru, wypisanego jawnie.

Wiąże się to ze wspomnianym już wyżej faktem, iż dowód omawianego twierdzenia jest wspomagany komputerowo. Nie mamy więc tu do czynienia, z jednej strony, z matematyką czystą w tym sensie, że całe rozumowanie, w tym wszystkie rachunki, daje się zapisać na papierze. Nie chodzi też o to, ze strony drugiej, by zaprząc komputer do znajdowania rozwiązań z natury przybliżonych. Analizę układu autorzy przeprowadzają zgodnie ze wszelkimi rygorami sztuki matematycznej, ale wspomagają ją komputerowymi algorytmami, które korzystając z tzw. *arytmetyki przedziałowej*, coraz bardziej znanej i popularnej, umiejętnie rozwijanej między innymi w Krakowie, pozwalają im szacować istotne w rozumowaniu wielkości.

Z analitycznego punktu widzenia sedno sprawy sprowadza się do tego, że warunki brzegowe typu Dirichleta sprawiają, iż liniową część układu zgrabnie diagonalizuje się zapisując rozwiązania w postaci szeregu Fouriera sinusów. To pozwala rozważać pewne podzbiory przestrzeni Banacha funkcji ciągłych jako zbiory ciągów (ich współczynników Fouriera) spełniających wybrane inteligentnie nierówności i w efekcie, poprzez algorytmy komputerowe i wzór Duhamela, pokazać, że zbiory te są zwarte i niezmiennicze dla odwzorowania Poincaré. Stąd, ze względu na twierdzenie Schaudera, wniosek o istnieniu punktu stałego ww. odwzorowania i w konsekwencji pierwsze główne twierdzenie.

2 Równanie Chafee–Infante

Twierdzenie drugie poświęcone jest rozwiązaniom zadania Cauchy'ego dla dość powszechnie znanego równania Chafee–Infante,

$$u_t = u_{xx} + \lambda u - bu^3$$

na przedziale $(0, \pi)$ z warunkami brzegowymi Dirichleta na końcach, z parametrem liczbowym $\lambda > 0$ i funkcyjnym $b = b(t)$. Zagadnienie to zostało dość gruntownie przebadane w przypadku, gdy b jest stałą niezależną od czasu; sporo informacji można też znaleźć o nim w przypadku, gdy b jest ograniczoną, rzeczywistą funkcją dodatnią, oddzieloną od zera. Doktorant podejmuje się analizy, gdy b dana jest wzorem

$$b(t) = \tfrac{3}{2}\sin(2\pi t) + 1, \qquad t \geq 0$$

a więc nie tylko ma wiele zer, ale i przyjmuje wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne.

Analiza ta wymaga nieco prostszych środków niż ta omówiona w poprzednim rozdziale, choćby dlatego, że mamy tu do czynienia z jednym równaniem, a nie ich układem — lecz z drugiej strony trzeba tu uporać się z zależnością od czasu, którą nie musieliśmy się martwić wcześniej. To jednak fakt, że i wynik nieco precyzyjniej opisuje strukturę oraz typ orbity, bo autor dowodzi istnienia tej ostatniej używając twierdzenia Banacha, a nie Schaudera, stwierdzając ponadto, że jej okres wynosi 1. To znacząca różnica choćby z tego powodu, że w ramach wniosku dowiadujemy się, iż orbita ta jest lokalnie asymptotycznie stabilna: rozwiązania zaczynające się odpowiednio blisko niej w tempie wykładniczym do niej zdążają.

Choć być może kontekst na to jasno wskazuje, wypada jednak podkreślić, że opisany wyżej wynik, podobnie jak poprzedni, otrzymany został na drodze ścisłej analizy matematycznej połączonej z precyzyjnymi oszacowaniami przybliżeń, których dokonuje w swych obliczeniach komputer. Innymi słowy, używając wspomnianej już arytmetyki przedziałowej, na podstawie danych otrzymanych z komputera można stwierdzić z całą pewnością, do jakiej przyzwyczaiła nas matematyka, że pewne przekształcenie jest kontrakcją i że zatem twierdzenie Banacha ma tu zastosowanie.

3 Język, ogólne wrażenie, podsumowanie

Rozprawa została napisana w języku angielskim. W jej lekturze przeszkadza przede wszystkim fakt, że autor nie wie, kiedy należy użyć rodzajnika określonego, a kiedy nieokreślonego. Trudności tego typu ma wielu z nas, ale w omawianym tu przypadku na całym szeregu stron od błędów aż się roi. Na przykład na szóstej autor pisze o pewnej wcześniej niewspomnianej funkcji: „$b(t)$ is the function dependent on time", tak jakby funkcja zależna od czasu była na całym świecie tylko jedna. Na tej samej stronie z kolei używa rodzajnika nieokreślonego w przypadku liczby naturalnej n dobranej do danego $\lambda > 0$ w taki sposób, że $n < \sqrt{\lambda} \leq n + 1$, tak jakby liczb takich było wiele.

Doktorant nie wie ponadto, że — w przeciwieństwie do języka polskiego — przed angielskim odpowiednikiem polskiego „że", tylko w wyjątkowych przypadkach stawia się przecinek. Nie odróżnia też *equality* od *equation*, a w kilku miejscach łączy podmiot w liczbie pojedynczej z orzeczeniem w liczbie mnogiej.

Pomniejszych błędów językowych znalazłem w ogóle pokaźną ilość, że wymienię choćby *exposition completeness* zamiast *exposition's completeness* na stronie 37 i *a enclosure* zamiast *an enclosure* na stronie 30. Prowadzi mnie to do wniosku, że władze Wydziału Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego miały w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku wiele racji wymagając (jak to wyczytałem ostatnio we wspomnieniach prof. M. Misiurewicza), by każdy wychodzący z jego murów matematyk choć jedną pracę, najlepiej doktorską właśnie, napisał w języku ojczystym.

Autor nie ustrzegł się też przed kilkoma błędami merytorycznymi, ale są one na szczęście drobne i należą raczej do kategorii literówek; na przykład na stronie 18. w jednej z całek granica dolna powinna być równa t_0 a nie 0. Nie rozumiem natomiast dlaczego nie zechciał pochylić się nad rzewnym płaczem kompilatora, że na stronie 23. jedna z linijek wychodzi na margines.

Nie zmienia to faktu, że rozprawę p. Banaśkiewicza oceniam wysoko. Nie wymaga chyba większego uzasadnienia moje przekonanie, że metody „czysto analityczne", to znaczy te niewspomagane komputerowo, mają swoje istotne, a wpisane w ich wewnętrzną naturę, ograniczenia. Liczba ważnych zagadnień matematycznych, w tym tych dotyczących równań różniczkowych, których nie da się przy pomocy wspomnianych metod rozwiązać, zapewne więc będzie z czasem rosnąć.

Z tej w istocie banalnej konstatacji wynika jednak wniosek poważniejszy, że w dobie gwałtownego rozwoju komputerów uparte odwracanie się od możliwości obliczeniowych, które one zapewniają nie może się skończyć dla matematyki dobrze. W Krakowie, w dużej mierze dzięki prof. P. Zgliczyńskiemu, ta świadomość jest żywa, a co więcej poparta zrozumieniem, że w naturze matematyki leżą rygor i precyzja, których komputerowym symulacjom, jakże często bezrefleksyjnym, brakuje. Zrozumieniem, że potrzebny jest rozwój narzędzi algorytmicznych, które będą wiodły do matematycznie ścisłych wyników.

Chwali się p. mgr. Banaśkiewiczowi, że zauważył potencjał kryjący się w opisanym wyżej kierunku badań i dzięki wyborowi odpowiedniego promotora w nim się wyspecjalizował. Jak to już miałem okazję wspomnieć wyżej, a co warto tu podkreślić, specjalizacja ta wymaga z jednej strony biegłości w, nazwijmy to, standardowej analizie równań różniczkowych cząstkowych. Dogłębnego zrozumienia fundamentalnych pojęć i technik takich jak szeregi Fouriera, twierdzenia o punkcie stałym, przekształcenie Poincaré czy półgrupa operatorów oraz umiejętnego posługiwania się nimi. Z drugiej — umiejętności programowania w taki sposób, by komputer nie odgrywał roli horoskopu, lecz był rzeczywiście pomocny w matematycznej analizie problemu. I wreszcie, choć to może wydawać się najprostsze — wyrobionej intuicji zarówno matematycznej jak i obliczeniowej. Mam tu na myśli to, że nie wydaje mi się, by nawet niezły specjalista od razu wiedział jak parametry brukselskiego układu oscylatora trzeba wybrać, zgadnąć, przewidzieć, by twierdzenie takie jak tw. 1.1. udowodnić.

Lektura pracy kandydata do stopnia doktora, a także bezpośredni kontakt z nim, przekonały mnie, że p. mgr Banaśkiewicz nie tylko sprawnie sobie poczyna w tym zaawansowanym świecie matematyki splecionej z informatyką, ale i ma świadomość tego, co się w jego otoczeniu dzieje (= zna istotną literaturę), wie co jest kluczowe, a co ma znaczenie mniejsze, co podobne, a co jakościowo nowe. Potrafi, na miarę doktoratu, wykorzystać i częściowo usprawnić aparaturę przygotowaną przez innych. Oczywiście umiejętności te nabył, nie mam co do tego wątpliwości, poprzez obcowanie ze znakomitymi matematykami, takimi jak dr hab. P. Kalita i prof. dr hab. P. Zgliczyński, ale też i na tym sztuka polega, by nie wypaść sroce spod ogona.

Nie mam też wątpliwości, że p. mgr Banaśkiewicz sobie na stopień doktora sumiennie zapracował i wnioskuję, by dopuścić go do dalszych etapów przewodu.

A. Bobrowski

Adam Bobrowski