RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGRA TYMOTEUSZA CHMIELA
SOME APPLICATIONS OF GRADED KAC-MOODY LIE ALGEBRAS

JOACHIM JELISIEJEW

Tematyka rozprawy dotyczy teorii reprezentacji algebr Liego typu Kaca-Moody'ego oraz ich zastosowań w algebrze przemiennej.

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów i dodatku. Dwa pierwsze rozdziały (łącznie 18 stron) stanowią wstęp do rozległej tematyki pracy. W pierwszym z nich wprowadzone są algebry i grupy Kaca-Moody'ego oraz podstawowe wyniki o nich. W rozdziale drugim w trzech podrozdziałach autor zamieszcza minimum informacji wymaganych do zrozumienia głównych wyników pracy.

Główne wyniki rozprawy zawarte są w rozdziałach 3–5. Rozdziały te są zasadniczo niezależne i dotyczą kolejno:

(1) ekwiwariantnych modułów Koszula związanych z gradacją,
(2) zanurzeń przestrzeni jednorodnych dla grup Kaca-Moody'ego,
(3) klasyfikacji minimalnych rezolwent dla algebr Gorensteina w kowymiarze 4 o sześciu minimalnych generatorach.

Rozdział trzeci rozszerza wyniki samodzielnej pracy autora [Chm24]. Dotyczy on modułów Koszula. Niech $S = \operatorname{Sym} V$ będzie pierścieniem wielomianów nad ciałem $\Bbbk$ i niech $K \subseteq \Lambda^2 V$ będzie podprzestrzenią. *Moduł Koszula* stowarzyszony z K jest ilorazem

$$\mathcal{W}(V,K) := \frac{\Lambda^2 V \otimes_{\Bbbk} S}{(\operatorname{im}(\Lambda^3 V) + K) \otimes_{\Bbbk} S}$$

gdzie odwzorowanie $\Lambda^3 V \to \Lambda^2 V \otimes_{\Bbbk} V \subseteq \Lambda^2 V \otimes_{\Bbbk} S$ pochodzi z kompleksu Koszula. Moduły Koszula (wprowadzone i rozwijane przez Papadima-Suciu, patrz np. [PS15]) są między innymi kluczowym elementem w [AFP+19]. Mimo to ich teoria obfituje w otwarte pytania, w tym dotyczące zachowania $\mathcal{W}(V,K)$, gdy K jest *ogólna* ustalonego wymiaru. Jak zwykle w takich zagadnieniach, istotne jest znalezienie przykładów, które będą ogólne w odpowiednim sensie, lecz dostatecznie szczególne, by można było nimi efektywnie manipulować.

W rozdziale trzecim rozpatrywane są szczególne moduły Koszula, które pochodzą od gradacji na algebrach Kaca-Moody'ego $\mathfrak{g}$; w tym przypadku mamy $V = \mathfrak{g}_1$ oraz $K = \ker\left([-,-]\colon \Lambda^2\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2\right)$. Główny wynik to kryterium na nilpotentność $\mathcal{W}(V,K)$ w terminach macierzy Cartana (Twierdzenie 3.1.31) dla *dopuszczalnych* gradacji (tj. gdy eliminacja gradującego wierzchołka prowadzi do skończonego typu diagramów). Ponadto autor, już nie korzystając z teorii algebr Kaca-Moody'ego znajduje rezolwenty i regularności modułów Koszula dla ogólnej podprzestrzeni K wymiaru $\dim K \leq \dim V$, patrz Twierdzenia 3.3.41–3.3.42. Twierdzenia te sprawdzają, że dana podprzestrzeń K już jest ogólna w powyższym sensie i w szczególności dowodzą, że regularność ogólnego modułu Koszula jest ograniczona z góry przez $\dim V - 3$, gdy $\dim K \leq \dim V$.

Rozdział czwarty pracy dotyczy *grup* G Kaca-Moody'ego, a konkretnej zanurzeń jednorodnych przestrzeni postaci $G/P_\bullet$, gdzie $P_\bullet$ jest maksymalną paraboliczną podgrupą pochodzącą od wyboru prostego pierwiastka $\bullet$. Głównym wynikiem rozdziału jest Twierdzenie 4.1.46, w którym

Data: 5 września 2024.

autor znajduje konkretne zanurzenie $G/P_\bullet$ w Grassmannian związany z konkretną reprezentacją wagową. W podrozdziałach 4.2–4.3 autor zdecydowanie ogranicza ogólność i pokazuje, jak Twierdzenie 4.1.46 wygląda w przypadkach klasycznych A_n, D_n, E_6.

Tematem rozdziału piątego jest zastosowanie algebr Kaca-Moody'ego do teorii rezolwent algebr Gorensteina w kowymiarze cztery. Rozdział ten wpisuje się w ciąg przełomowych wyników prof. Jerzego Weymana łączących teorię reprezentacji oraz klasyfikację rezolwent. Jak zaznacza Autor, część badawcza tego rozdziału jest otrzymana wspólnie z drem Lorenzo Guerrieri.

Główny wynik rozdziału to Twierdzenie 5.4.52. Postuluje ono, że nad odpowiednim pierścieniem R zawierającym $1/2$ każdy ideał Gorensteina $I \subset R$ kowymiaru 4 minimalnie generowany przez 6 elementów jest postaci $I = (\mathrm{Pf}(A), y)$, gdzie $\mathrm{Pf}(A)$ jest ideałem Pfaffianów pewnej macierzy 5×5, a więc $R/(\mathrm{Pf}(A))$ jest Gorensteina kowymiaru trzy zaś y jest niedzielnikiem zera w $R/(\mathrm{Pf}(A))$. Gdy I jest generycznie zupełnym przecięciem, wynik ten był otrzymany w [HM85]. Ogólnym przypadek przez wiele lat pozostawał otwarty.

Rozdział 5 prócz głównego wyniku zawiera godne uwagi wyniki wstępne. W części 5.2 autor przytacza za [CLW23] konstrukcję pierścienia generycznego w kowymiarze cztery. W podrozdziale 5.3 autor omawia wyższe odwzorowania strukturalne (ang. higher structure maps) dla tego przypadku.

Pracę kończy Dodatek, zawierający tabelę jednorodnych modułów Koszula i stowarzyszonych rozmaitości rezonansowych (ang. resonance varieties) oraz ich niezmienników. Dodatek ten powstał dzięki zastosowaniu programu *Macaulay2*. Autor dobrze opanował ten program, jak pokazuje również kod do obliczania tzw. współrzędnych spinorowych (użytecznych w rozdziale 5) podany na końcu pracy.

Przechodzę do oceny pracy. Po pierwsze, imponuje liczba poruszonych w niej tematów: algebry Kaca-Moody'ego, moduły Koszula, rezolwenty, pierścienie generyczne i twierdzenia strukturalne i klasyfikacja wymagały od Autora wiedzy z teorii reprezentacji, algebry przemiennej i elementów geometrii algebraicznej, w szczególności rozdmuchań. Ponadto problemy badawcze w rozdziałach 3 i 5 są zupełnie różne i wymagały różnych spojrzeń: od kombinatorycznego w Twierdzeniach 3.3.41–3.3.42 do strukturalnego w Twierdzeniu 5.4.52.

Struktura pracy nie pozostawia nic do życzenia. Jakość rozdziałów i logiczna struktura pracy jest bardzo różnej jakości. Niektóre z rozdziałów wprowadzających nie wydają się być używane w dalszych częściach, np. dotyczy to §1.4, §2.2. Rozdział §2.3 zawiera liczne usterki w sformułowaniach twierdzeń strukturalnych (patrz poniżej). Notacja §2.3 i §5.1 nie jest zgodna. Rozdział §3 jest zdecydowanie dobrej jakości i sam ten rozdział stanowi **oryginalne rozwiązanie problemu naukowego**. Rozdział 5 wydaje się niestety najmniej dopracowaną częścią pracy (szczegółowe uwagi do niej znajdują się poniżej). Wydaje mi się, również ta część jest w ogólnych prawidłowa i po przeredagowaniu można rozważyć publikację. Obecna wersja jest nieczytelna; zrozumiałem ją tylko dzięki znajomości metody z innych źródeł (w tym [Wey22], czy cyklu wykładów X.Ni).

Cała praca jest stosunkowo krótka: część ściśle badawcza, tj. rozdziały 3–5 zajmują jedynie 35 stron. Wydłużenie pracy niewątpliwie zwiększyłoby jej czytelność i gdyby doktorat miał zostać opublikowany, jest ono konieczne. Mimo wszystko uważam, że rozległość naukowa pracy oraz jakość rozdziału 3. równoważą niedostatki rozdziału 5 i niecelowe jest wymaganie poprawek na tym etapie. **Podsumowując**, uważam, że obecna wersja pracy **spełnia zarówno ustawowe, jak i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim.**

Joachim Jelisiejew
5. 09. 2024

Literatura

[AFP+19] Marian Aprodu, Gavril Farkas, Ştefan Papadima, Claudiu Raicu, and Jerzy Weyman. Koszul modules and Green's conjecture. *Invent. Math.*, 218(3):657–720, 2019. 1

[Chm24] Tymoteusz Chmiel. Koszul modules of Kac-Moody Lie algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 228(7):Paper No. 107629, 12, 2024. 1

[CLW23] Ela Celikbas, Jai Laxmi, and Jerzy Weyman. Spinor structures on free resolutions of codimension four Gorenstein ideals. *Osaka J. Math.*, 60(4):903–931, 2023. 2

[HM85] Jürgen Herzog and Matthew Miller. Gorenstein ideals of deviation two. *Comm. Algebra*, 13(9):1977–1990, 1985. 2

[PS15] Stefan Papadima and Alexander I. Suciu. Vanishing resonance and representations of Lie algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 706:83–101, 2015. 1

[Wey22] Jerzy Weyman. Higher structure theorems for codimension four Gorenstein ideals. *https://alg.matinf.uj.edu.pl/19.09.2022codim4GorensteinHST.pdf*, 2022. 2

Lista miejsc wymagających uwagi

Poniżej numeracja wedle stron w pliku PDF (czyli podany numer jest zwykle o jeden większy niż numer strony).

(1) str.18, Definition: po "of weight $\lambda \in$" powinno zapewne nastąpić $\mathfrak{h}^*$.
(2) w tej samej linijce brakuje nawiasów przy $V\lambda$.
(3) str.25, "It is a standard fact from commutative algebra": w tym sformułowaniu nie jest to prawdziwe stwierdzenie, bo nośnik może zawierać ideał nieistotny.
(4) str 25, $\operatorname{im}(\delta_p)\operatorname{im}(\delta_a \circ i)$. Czy tutaj $p = a$ i brakuje znaku ilorazu?
(5) str 28, "If $n = 0$", the ideal I must be principal. Powinno być $n = 1$.
(6) str 28, Twierdzenie 2.3.26. Ideał $\operatorname{im} d_1$ niekoniecznie jest generowany przez minory M, może być też postaci $minory(M) \cdot f$.
(7) str 28, Twierdzenie 2.3.27. Homomorfizm a_k ma dziedzinę $\Lambda^{r_k} F_{k-1}$, a nie $\Lambda^{r_k} F_k$.
(8) str 29, Twierdzenie 2.3.28. Homomorfizm a_k' ma przeciwdziedzinę F_{k-1}^*.
(9) str 29, Twierdzenie 2.3.28, wyśrodkowany diagram. W prawym bocznym polu powinno być $\Lambda^{r_k - 1} F_{k-1}$.
(10) str 37. Zamiast odwoływać się do nigdzie nie zdefiniowanej numeracji Bourbakiego można odwołać się do diagramu na stronie 51.
(11) str 46. Pojawiają się dwie różne litery na oznaczenie grupy Kaca-Moody'ego: G oraz pisane G.
(12) str 47, "In fact the assumption that D is simply laced is not necessary". Wygląda, że ten paragraf powinien być częścią dowodu Lematu 4.1.45, bo ten przypadek jest(?) stosowany w następnym dowodzie.
(13) str 53, §1, "an ideal I is Gorenstein if the localization R_I has finite injective dimensional as a module over itself". Powinno być R/I.
(14) str 53, Twierdzenie 5.1.48. Brakuje założenia, że R jest regularny, inaczej np. $R = \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2]/(y_1, y_2)^2$ oraz macierz o Pfaffianach (x_1, x_2, x_3) stanowią kontrprzykład.
(15) str 53, Wzór po "We focus on the codimension 4 case": z prawej strony R, F, nie powinno być F.
(16) str 55, "The ring $A(n)_\infty$ has a natural structure". To jest nietrywialne twierdzenie i powinno być cytowane wprost.
(17) str 55, "The ring $A(N)_\infty$ is generated by three critical representations". To jest nietrywialne twierdzenie i powinno być cytowane wprost.
(18) str 56, Podrozdział 3, "Higher structure maps for E_6". Podrozdział nie zawiera ani jednego stwierdzenia i to utrudnia sprawdzenie, co jest dowodzone.
(19) str 58, "We show that the matrices of top components of critical representations of one of the two resolutions give differentials and spinor coordinates on the other one". Zdecydowanie brakuje zarówno atrybucji tej (kluczowej!) obserwacji, jak i wyjaśnienia, dlaczego ona jest użyteczna.
(20) str 61, "To prove the conjecture, we need another set of higher structure maps". To kolejna kluczowa obserwacja i znów brakuje omówienia jej. Ponadto aż do strony 64 znów mamy obliczenia bez żadnego sformułowania.
(21) str 64, Lemat 5.4.51. Sformułowanie lematu nie zawiera macierzy M!

(22) str 64, Lemat 5.4.51. "It can be checked that this definition is independent of the choice of g_1 and g_2 and this for a fixed split complex $\mathbb{F}$ the matrix M is unique". Sprawdzenia brakuje.

(23) str 64, Lemat 5.4.51. "It can be checked that this definition is independent of the choice of g_1 and g_2 and this for a fixed split complex $\mathbb{F}$ the matrix M is unique". Nie jest jasne, w jaki sposób M jest jedyna. Jeśli przyjąć, że sformułowaniu Lematu powinny być opisane pierwszy wierz i kolumna M, to nadal M nie wydaje się jednoznaczna.

(24) str 65, Twierdzenie 5.4.52. Czy w przypadku lokalnym zakładamy, że R jest regularny? Dlaczego istotne jest, że ciało jest algebraicznie domknięte?

(25) str 65, Dowód twierdzenia 5.4.52. "The point lies in the image of the canonical embedding E_6/P_{α_1}". To zdanie daje praktycznie cały dowód i powinno być dokładnie uzasadnione z odniesieniami do poprzednich wyników (co sprawiłoby, że te wyniki trzeba byłoby sformułować).