Michał Farnik   Kraków, 01.03.2023

Streszczenie pracy doktorskiej
„Gra w zgadywanie koloru czapki"

W pracy badamy wariant znanej gry w zgadywanie koloru czapki. W grze bierze udział n graczy oraz adwersarz. Adwersarz umieszcza na głowie każdego z graczy czapkę w jednym z K kolorów. Gracze znajdują się w wierzchołkach grafu bez pętli G. Każdy gracz widzi tylko czapki na głowach graczy, którzy znajdują się w wierzchołkach G sąsiadujących z jego wierzchołkiem, inna komunikacja jest zabroniona. Każdy z graczy ma s prób na odgadnięcie koloru swojej czapki. Zadaniem wszystkich graczy jest zapewnienie, żeby co najmniej jeden z nich odgadł. W tym celu przed rozpoczęciem gry ustalają publiczną, deterministyczną strategię. Gracze znają graf G i swoje miejsce w nim przed ustaleniem strategii. Mówimy, że gracze mają strategię wygrywającą dla grafu G, s prób odgadnięcia i K kolorów, jeśli mają strategię, przy której dla każdego rozmieszczenia czapek przynajmniej jeden odgaduje. Definiujemy s-liczbę czapkową HG(s,G) grafu G jako największą liczbę naturalną K, dla której gracze mają strategię wygrywającą dla G, s oraz K.

Wykorzystując lokalny lemat Lovásza oraz bezstratną kompresję, pokazujemy, że $HG(s,G)=O(s\Delta(G))$. Badamy również zależność między HG(s,G) oraz col(G). Pokazujemy, że dla drzewa T mamy HG(s,T)≤s^2+s. Ponadto dla każdego n, dostatecznie dużego m=m(n) oraz pełnego grafu dwudzielnego $K_{n,m}$ mamy HG(s, $K_{n,m}$)=ns^2+s. Stawiamy hipotezę, że HG(s,G) jest ograniczone z góry przez funkcje s oraz col(G) i dowodzimy ten fakt dla pewnego typu strategii odgadywania. Dowodzimy lematu, który pozwala adwersarzowi podzielić graf G na podgrafy G1 i G2 oraz znaleźć strategię wygrywającą w grze na grafie G w oparciu o strategie wygrywające w grach na grafach G1 i G2. Wykorzystujemy ten lemat między innymi do ograniczenia s-liczby czapkowej grafów o dużym obwodzie.

Michał Farnik