

prof. dr hab. Maciej Capiński  
Wydział Matematyki Stosowanej  
Akademia Górniczo-Hutnicza

Kraków 27.08.2024

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Donalda Woukeng Feudjio

**Combinatorial dynamics in the study of classical dynamical systems.**

Omawiana praca doktorska wpisuje się w ważny nurt badań w dziedzinie komputerowo wspieranych dowodów w układach dynamicznych. Stosowanym w tym nurcie podejściem jest zastosowanie topologii algebraicznej do badania własności układów dynamicznych. Podejście to jest oparte na wyznaczeniu stosownych podzbiorów w dziedzinie układu, które posiadają odpowiednie własności względem pola wektorowego, oraz obliczenie niezmienników topologicznych dla układu na bazie dobranych zbiorów; przykładowo grupy homotopii, homologii, indeksu Conley'a. Ważne w tym podejściu jest to, żeby na podstawie obliczonego niezmiennika móc udowodnić własności badanego układu takie jak: istnienie zbiorów niezmienniczych, punktów stacjonarnych, orbit okresowych, podków topologicznych (dynamiki symbolicznej i chaosu) lub rozkładu Morsa. Chcemy aby wyznaczanie pożądaných niezmienników móc sprowadzić do skończonego zbioru obliczeń, które można potem wykonać na komputerze. Oznacza to, że zaczynając od ciągłego układu dynamicznego, przechodzimy poprzez dyskretyzację przestrzeni i pola wektorowego, często sprowadzając problem do reprezentacji w języku teorii grafów, dochodząc do reprezentacji umożliwiającej algorytmiczne obliczenia pożądaných niezmienników, uzyskując dowód porzedanych własności dla badanego układu dynamicznego.

Praca doktorska podąża w tym kierunku, a dokładniej rzecz biorąc w kierunku dodatkowego zalgorytmizowania pierwszego etapu powyżej opisanego procesu. Często w konkretnych przykładach i zastosowaniach naszkicowanego powyżej podejścia dyskretyzacja przestrzeni poprzez wyznaczanie odpowiednich podzbiorów dziedziny jest przeprowadzana "ręcznie". W wielu publikacjach matematyczny wynik poprzedzany jest nieścisłym zbadaniem własności układu za pomocą standartowych symulacji numerycznych, i na tej podstawie doboiem "na oko" interesującej nas dyskretyzacji czy podzbiorów przestrzeni. Później sprawy oddawane były w ręce zalgorytmizowanych obliczeń na komputerze. Doktorat zawiera opis podejścia, który ów "ręczny" etap całej procedury dokonuje automatycznie za pomocą odpowiednich algorytmów wykonywanych na komputerze. Cel jest szczytny: "Świątym Graalem" jest uzyskanie w pełni zautomatyzowanego procesu w którym dajemy na wejściu komputerowi wzór pola wektorowego, a na wyjściu w sposób w pełni zautomatyzowany otrzymujemy matematyczny dowód własności układu dynamicznego zadanego przez to pole wektorowe.

Doktorat przedstawia jak można powyższy cel uzyskać dla układów dynamicznych na płaszczyźnie poprzez konstrukcję transwersalnej dekompozycji symplecjialnej dla autonomicznych równań różniczkowych. Korzystając z tej dekompozycji oraz teorii kombinatorycznych pól wielowektorowych opracowana została procedura algorytmicznego wykrywania izolowanych zbiorów niezmienniczych, dla których można obliczyć indeks Conley'a. W rozprawie przedsta-



wiona została również metoda wyboru kombinatorycznych sekcji Poincaré. Za pomocą tego podejścia można dowodzić istnienia punktów stacjonarnych, orbit okresowych i rozkładu Morsa.

Rozdział 1 pracy zawiera wiadomości wstępne dotyczące potrzebnych pojęć i własności z dziedziny przestrzeni topologicznych, algebry liniowej, ciągłych układów dynamicznych, teorii grafów i algebry topologicznej dla kompleksów symplecticalnych. Rozdział 2 wprowadza potrzebne narzędzia z pracy [15] dla kombinatorycznych wielowartościowych pól wektorowych, wraz z ich właściwościami. Pokazane jest tam w jaki sposób można skonstruować skierowany graf na bazie kombinatorycznego wielowartościowego pola wektorowego i omówione są właściwości takiego grafu. Rozdział 3 zawiera główne wyniki rozprawy. Opisuje algorytmy opracowane do skonstruowania odpowiedniego rozkładu symplecticalnego wybranego obszaru przestrzeni fazowej dla zadanego równania różniczkowego i doboru kombinatorycznych sekcji Poincaré. Pokazuje również algorytm doboru stosownego wielowartościowego pola wektorowego. Rozdział 4 zawiera dyskusję optymalizacji doboru kompleksu symplecticalnego. Metoda bazuje na konstrukcji zaczynając od punktów stacjonarnych, która jest kontynuowana poprzez dobór transversalnych do potoku wielościannów. Ostatni rozdział 5 stosuje opracowaną teorię dla kilku przykładów układów dynamicznych dla dwuwymiarowych pól wektorowych.

Doktorat jest oparty na jednym artykule:

- [24] Donald Woukeng, Damian Sadowski, Jakub Leśkiewicz, Michał Lipiński, and Tomasz Kapela. Rigorous computation in dynamics based on topological methods for multivector fields. *Journal of Applied and Computational Topology*, pages 1–34, 2023.


którego pierwszym autorem jest doktorant. W rozprawie jest jasno określone, że wszystkie przedstawione w głównej części wyniki i ich dowody są autorstwa mgr Donalda Woukeng Feudjio, poza rozdziałem 2 oraz Twierdzeniem 4.1.5, gdzie jest on współautorem.

Częścią rozprawy jest kilka komputerowo wspieranych dowodów dla przykładów pól wektorowych: w szczególności dla układu posiadającego dwie orbity okresowe (5.1) i dla oscylatora Van der Pola (4.3). Rozprawa ogranicza się do podania wyników końcowych w postaci wykresów, ale o ile tego nie przeoczyłem nie wydaje się być udostępniony kod źródłowy dla programu komputerowego. Jest to moim zdaniem pewien mankament tej rozprawy. Osobiście wyznaję pogląd, że kod komputerowo wspieranych dowodów powinien być publicznie udostępniony, choćby przez położenie na stronie www autora lub przez repozytorium GitHub; w zasadzie w dowolny sposób, lecz powinien być publiczny. W przypadku omawianej rozprawy ma to dodatkowe znaczenie. Celem jest wypracowanie w pełni zautomatyzowanej metodologii. To że działa ona dla dobranych przykładów nie oznacza, że będzie działać dla innych. Jako recenzent z przyjemnością przetestowałbym tę metodologię dla prostych dobranych przeze mnie przykładów i zobaczył na ile proponowane podejście daje sobie z nimi radę.

Wydawać się może, że kolejnym mankamentem jest to, że praca ogranicza się do autonomicznych równań różniczkowych na płaszczyźnie. Można argumento-

wać, że badanie potoków na płaszczyźnie nie jest problemem skomplikowanym: choćby na bazie ogólnie dostępnych programów do rysowania przestrzeni fazowych. Przy ich użyciu przeważnie widać co w danym układzie się dzieje, i jest stosunkowo łatwo dobrać lokalną sekcję Poincaré i udowodnić istnienie np. orbity okresowej znajdując punkt stały dla odwzorowania Poincaré. Da się to zrobić również w arytmetyce interwałowej uzyskując matematyczny dowód, i jest to podejście które bym osobiście zastosował. Wypowiedziawszy tą krytykę ją teraz podważę. Ostatecznym ważnym celem jest uzyskanie analogicznych wyników dla wyższych wymiarów. Od czegoś trzeba zacząć i zaczęcie od płaszczyzny jest naturalnym pierwszym krokiem. Kolejnym aspektem jest to, że badanie pól wektorowych na płaszczyźnie prowadzi do trudnych i matematycznie ważnych problemów. Nie trzeba daleko szukać: 16 problem Hilberta. (Tym bardziej brakowało mi możliwości zabawy programem komputerowym, gdyż miałem ochotę potestować go na kilku przykładach wielomianowych pól wektorowych.)

Rozprawa doktorska jest oparta na jednej publikacji napisanej z kilkoma współautorami i dotyczy problemu na płaszczyźnie. Jest to z jednej strony pewien niedosyt. Z drugiej jednak strony, omawiana rozprawa jest elementem większej układanki i sukcesywnie rozbudowywanego programu badawczego. Jest to pierwszy naturalny krok w celu uzyskanie w pełni zautomatyzowanej ogólnej i uniwersalnej metodologii dowodzenia własności układów dynamicznych za pomocą narzędzi topologii algebraicznej. Rozprawa zawiera nietrywialne wyniki zarówno matematyczne jak i algorytmiczne, doktorant wykazał się dobrą znajomością tematyki, oraz biegle posługuje się warsztatem matematycznym. W moim przekonaniu przedstawiona rozprawa spełnia więc kryteria stawiane pracom doktorskim i moja opinia na jej temat jest pozytywna. Rekomenduję więc dopuszczenie Pana Donalda Woukeng Feudjio do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

  
Maciej Capiński