Prof. dr hab. Leszek Plaskota
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Recenzja rozprawy doktorskiej autorstwa mgr. Donalda Woukeng Feudjio

pt. "Combinatorial dynamics in the study of classical dynamical systems"

KONKLUZJA

Przedłożna rozprawa spełnia wymagania formalne i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie mgr. Donalda Woukeng Feudjio *do dalszych etapów przewodu doktorskiego.*

UZASADNIENIE

1. Wstęp i najważniejsze osiągnięcie

Rozprawa doktorska mgr. Donalda Woukeng Feudjio dotyczy analizy jakościowej dwuwymiarowych autonomicznych układów dynamicznych za pomocą metod topologicznych wspomaganych komputerowo. Ta stosunkowo nowa dziedzina pozwala wydobyć pewne własności układów dynamicznych zwykle niemożliwych do uzyskania przy zastosowaniu tradycyjnych metod numerycznych, które dają jedynie numeryczną wartość rozwiązania. Kluczową jest tu teoria kombinatorycznych pól wielowektorowych rozwinięta wcześniej m.in. przez promotora rozprawy. Główna idea polega na zastąpieniu oryginalnego układu dynamicznego ciągłego układem dyskretnym dzielącym pożądane cechy układu ciągłego i poddającym się dalszej analizie teoretycznej i obróbce komputerowej zmierzających do wykazania pewnych jakościowych cech układu wyjściowego. Z pomocą takiego podejścia do problemu, w artylule [19] (numeracja jak w rozprawie) stworzono teoretyczne podstawy weryfikacji, a dokładniej podano warunki dostateczne, istnienia orbit okresowych układu dynamicznego. Brakowało jednak algorytmicznych konstrukcji kluczowych skończonych rozkładów przestrzeni wyjściowej pozwalających na automatyczną weryfikację własności. Takie konstrukcje pokazano niedawno w artykule [24], którego jednym z pięciu współautorów jest habilitant. I właśnie głównie na tym artykule opiera się niniejsza rozprawa. Najważniejszym osiągnięciem w rozprawie jest więc podanie pełnej procedury wspomaganej komputerowo, efektem której jest weryfikacja istnienia i przybliżona lokalizacja orbit okresowych danego dwuwymiarowego układu dynamicznego. Ta dość skomplikowana procedura wymaga wykonania wielu nietrywialnych kroków i wykorzystuje zarówno wcześniej znane wyniki, jak i nowe wyniki teoretyczne habilitanta zaprezentowane w pracy [24].

2. Streszczenie zawartości rozprawy

Rozprawa napisana jest w języku angielskim. Liczy 67 stron, na które składają się pięć rozdziałów i bibiografia z 24 pozycjami. Rozdział 1 ma charakter wstępny, a jego celem jest wprowadzenie czytelnika w podstawowe pojęcia i własności używane dalej, a związane m.in. z przestrzeniami topologicznymi, algebrą liniową i analizą czy teorią grafów. Pojawiają się pojęcia przepływów, kompleksów symplicjalnych i odpowiednich grup homologii.

Rozdział 2 jest już bezpośrednim przygotowaniem pola do pokazania głównych wyników rozprawy. Wprowadzone są elementy teorii kombinatorycznych pól wielowektorowych na danej przestrzeni topologicznej oraz własności generowanych przez nie odpowiednich układów dynamicznych. Zdefiniowne są m.in. homologiczny indeks Conleya i rozkład Morse'a. W dalszej części pokazano, że dynamika rzeczonych układów dynamicznych może być równoważnie studiowana poprzez analizę ścieżek w odpowiadających im grafach skończonych. Zacytowano kilka twierdzeń łączących oba podejścia. W końcu zdefiniowano dopuszczalne przepływy dla danego rozkładu komórkowego przestrzeni topologicznej.

Główne tezy rozprawy znajdują się w najdłuższym i najbagatszym w wyniki rozdziale 3. Dla wyjściowego pola wektorowego ciągłego i triangulacji przestrzeni, pokazano automatyczną konstrukcję kombinatorycznego pola wielowektorowego dzielącego pożądane własności pola ciągłego, oraz odpowiadającego mu rozkładu komórkowego. Konstrukcja takiego pola jest kluczowa m.in. dla późniejszej weryfikacji istnienia orbit okresowych. Zasadnicza procedura o nazwie ADMISSIBLEMVF zwracająca kombinatoryczne pole wielowektorowe, jest pokazana w podrozdziale 3.1 i poprzedzona dwoma pomocniczymi procedurami: sprawdzającą kierunek przepływu przez daną krawędź (ważne jest tu pojęcie transwersalności krawędzi) oraz ustalającą wypukłość elementów rozkładu przestrzeni. Procedury są zapisane w formie pseudokodów, a ich pożądane działanie wykazane w serii czterech twierdzeń (Propositions 3.1.3, 3.1.4, 3.1.6, Theorem 3.1.5) i zilustrowane przykładami. W podrozdziale 3.2 dowodzi się (Propositions 3.2.1-3.2.5, Theorem 3.2.6), że jeśli pole wielowektorowe zwracane przez ADMISSIBLEAVF generuje pewien szczególny rozkład komórkowy to przepływ odpowiadający oryginalnemu polu wektorowemu jest dopuszczalny względem tego rozkładu. W końcu, w podrozdziale 3.3 opisano iteracyjny algorytm, POINCARESECTION, który potencjalnie znajduje kombinatoryczną wersję sekcji Poincaré dla danego elementu rozkładu komórkowego. Pokazuje się (Proposition 3.3.1), że algorytm albo zwraca pożądany wynik albo wykazuje błąd. W tym drugim przypadku zaleca się powtarzanie procedury z innym startem, aż do skutku.

W rozdziale 4 pokazano ulepszoną metodę konstrukcji kompleksu symplicjalnego będącego podstawą rozkładu komórkowego przestrzeni, zmierzającą do optymalizacji całego procesu w przypadku skomplikowanych pól wektorowych. Wiąże się to z użyciem tzw. transwersalnych wielokątów w celu zniwelowania możliwych niepożądanych silnych rotacji wokół punktów równowagi. Odpowiedni algorytm TRANSVERSALPOLYTOPE i jego teoretyczne podstawy (Theorem 4.1.3-4.1.5) wraz z przykładami są w podrozdziale 4.1. Warto dodać, że wyniki wychodzą tu poza dwa wymiary. Inne usprawnienia, związane z zagęszczaniem siatki i 'uzwarcaniem' przestrzeni, są wspomniane w podrozdziałach 4.2 i 4.3.

Ostatni rozdział 5 stanowi podsumowanie całego wspomaganego komputerowo procesu weryfikacji istnienia orbit okresowych dla danego układu dynamicznego, którego elementy były prezentowane i analizowane wcześniej. Poszczególne kroki opisano w podrozdziale 5.1, natomiast w podrozdziałach 5.2 i 5.3 zaprezentowano działanie całego procesu na dwóch przykładach pól wektorowych indukowanych odpowiednimi planarnymi równanami różniczkowymi zwyczajnymi. Rozprawę kończy podrozdział 5.4 zawierający dyskusję możliwych przyszłych badań habilitanta.

3. Uwagi końcowe

W swojej rozprawie doktorskiej mgr DONALDA WOUKENG FEUDJIO rozwiązuje oryginalny problem konkretnej implementacji procesu weryfikacji wspomaganej komputerowo istnienia orbit okresowych danego planarnego układu dynamicznego. Rozwiązanie problemu wiązało się z dobrym zrozumieniem i zastosowaniem bogatego aparatu pojęciowego związanego głównie z zagadnieniami topologicznymi, oraz subtelnymi rozumowaniami. (Znalazłem potwierdzenie tego faktu również przy okazji wysłuchania referatu habilitanta na naszym seminarium w Warszawie.) Zaprezenowane algorytmy realizujące poszczególne etapy długiego procesu weryfikacji wymagały nietrywialnych dowodów ich poprawności. I z tym wszystkim doktorant dobrze sobie poradził.

Pewne wątpliwości mógłby wzbudzić fakt, że rozprawa bazuje na artykule, który obok habilitanta ma jeszcze czeterech współautorów. Przyjmuję wyjaśnienie autora wyrażone we wstępie i osobistej rozmowie, że o ile habilitant raczej nie zajmował się kodowaniem algorytmów, to jest samodzielnym autorem dowodów wszystkich twierdzeń (oprócz jednego twierdzenia, gdzie jest współautorem) w kluczowych rozdziałach.

Recenzję zakończę kilkoma uwagami, które nie wpływają na ogólną pozytywną ocenę rozprawy, jak w konkluzji na początku recenzji.

- Autor wskazuje, że niektóre etapy procesu weryfikacji mogą zawieść i z tego powodu proponuje pewne usprawnienia, jak np. użycie transwersalnych wielokątów w przypadku 'trudnych' układów. Mimo tego, nie jest jasne jaki jest rzeczywisty zakres stosowalności całej skomplikowanej procedury, co oczywiście wiąże się z pytaniem o jej praktyczną efektywność.

- W części wstępnej zabrakło mi trochę przykładów ilustrujących wprowadzane pojęcia, zwłaszcza te związane z topologią algebraiczną. Inne przykłady układów dynamicznych mogłyby rzucić pewne światło na odpowiedź na pytanie w poprzednim punkcie.

- Jako numeryk zajmujący się złożonością zadań numerycznych, chętnie zobaczyłbym informację na temat kosztów obliczeniowych.

- W rozprawie, zwłaszcza w początkowych rozdziałach oraz w bibliografii, jest sporo drobych usterek redakcyjnych, z których część wymieniam poniżej.

  1. strona 12, linia -5: "A convex hull ... conv$A$ of a subset A ..."
  2. 13, +6: "... an *n-simplex* spanned by vertices $v_0, v_1, \ldots, v_n$. The number n is ..."
  3. 13, +9: "... *boundary* of S, denoted $\operatorname{bd} S$, is the union of all k-faces of S, where $k < n$. ... of S we understand the set $S \setminus \operatorname{bd} S$."
  4. 13, +12: 'geometric simplicial complex'
  5. 13, -12: 'if and only if'
  6. 13, -8: "... a set of points and $\Omega = \operatorname{conv} S$.
  7. 13, -2: 'abstract simplex' i 'geometric simplex' nie były formalnie zdefiniowane. Tu powinna być po prostu użyta nazwa 'simplex'.
  8. 14, +4: "The simplex with the same vertices as σ, but with the opposite orientation is denoted by $-\sigma$."
  9. 14, +9: "... is a function c from ..."
  10. 14, +14: "If $p < 0$ or $p > \dim K$ then $C_p(K)$ denotes ..."
  11. 14, -4: Formuła definiująca $\partial_p \sigma$ formalnie nie ma sensu, bo sympleks σ nie jest elementem grupy $C_p(K)$. Brakuje uwagi o utożsamianiu danego sympleksu σ z odpowiadającym mu p-łańcuchem.
  12. 15,+3: '... a *boundary operator*.'

13. 15, +5: “From (1.10) we have ...”
14. 15, +8: ... the pth *homology group* of K.”
15. 15, -10,-11: $\ker \partial_p$, $\operatorname{im} \partial_{p+1}$,
16. 15, -5: “A *standard n-simplex* (or *unit* n-simplex) ...”
17. 15, -1: ‘n-simplices’
18. 16, +7: “which is an $(n-1)$ simplex.”
19. 16, +9: $H_n(X) = \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$.
20. 16, +15: $H_n(X, A) = \ker \partial_n^A / \operatorname{Im} \partial_{n+1}^A$.
21. 16, -19: “A *graph* G [1, Section 1.1] is ...”
22. 16, -17: ‘... edge of G ...’
23. 16, -11: Zdane zaczynające się od ‘We will also’ jest niejasne.
24. 16, -9: ‘... sets X and Y ...’
25. 17, +4: “A graph is ... Vertices x and y ...”
26. 18, +7: $\dim \sigma = \dim \tau + 1$
27. 19, +3: “... the set $\operatorname{Fr}(X) = |\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_{\text{top}}|$.”
28. 19, -9: “Moreover, cellular homology and ..”
29. 20, +2: “Most of the definitions ...”
30. 21, +1: “Any multivector field ...”
31. 22, -15: “In [15] the authors consider the graph $G_{\mathcal{V}}$ ...”
32. 24, -2: usunąć ‘figure’
33. 25, -13: “The map $\pi_{\mathcal{V}}$ is ...”
34. 27, -16: “that a cellular decomposition”
35. 29, +6: Tytuł podrozdziału jest taki sam jak tytuł całego rozdziału pomimo, że w podrozdziale nie ma mowy o przepływach
36. 66, -5: “*Algebraic Topology*”
37. 66, -4: “*Matrix Analysis*”
38. 67, +8: dane na temat pozycji [15] są niekompletne
39. 67, -14: powinno być “108: 106226, 2022”
40. 67, -1: W momencie pisania tej recenzji artykuł [24] był tylko w *Open Access*, http://doi.org/10.1007/s41468-023-00149-2 nie miał jeszcze przypisanego woluminu i stron.