



**GDAŃSK UNIVERSITY
OF TECHNOLOGY**

FACULTY OF APPLIED PHYSICS AND MATHEMATICS

Gdańsk, 30 września 2024

Prof. dr hab. Grzegorz Graff
Politechnika Gdańska
Wydział Fizyki Technicznej
i Matematyki Stosowanej
80-233 Gdańsk
ul. Narutowicza 11/12

**Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr Donalda Woukeng Feudjio
p.t. "Combinatorial dynamics in the study
of classical dynamical systems."**

1. Dane bibliograficzne dotyczące recenzowanej pracy

Promotorem rozprawy jest prof. dr hab. Marian Mrozek, a funkcję promotora pomocniczego pełni dr Tomasz Kapela.

Rozprawa napisana jest w całości w języku angielskim, liczy 67 stron i podzielona jest na następujące części: podziękowania, streszczenie, spis treści, wprowadzenie, 5 rozdziałów i bibliografię.

2. Tematyka rozprawy

W teorii układów dynamicznych niejednokrotnie mamy do czynienia z odwzorowaniami o bardzo bogatej i skomplikowanej dynamice. Często zdarza się także, że badane równania nie mają analitycznych rozwiązań. W takich przypadkach nader użyteczne jest wykorzystanie topologicznych metod wspomaganych komputerowo. *Computer assisted proofs* odgrywają coraz większą rolę, pozwalając mierzyć się z coraz trudniejszymi problemami. Wielką w tym zasługą promotora rozprawy, który wraz ze swoim zespołem i współpracownikami od kilkadziesiąt lat ze znaczącymi sukcesami rozwija teorię i oprogramowanie związane z tworzeniem ścisłych pod względem matematycz-

nym dowodów topologiczno-numerycznych.

W podejściu tym ważne miejsce zajmuje przełożenie terminów przestrzeni topologicznych i odwzorowań na język skończonej kombinatoryki.

Pewnym aspektem tej problematyki poświęcony jest recenzowany doktorat. Badanym problemem jest znajdowanie orbit periodycznych danego układu pochodzącego od autonomicznego równania różniczkowego na dwuwymiarowej rozmaitości.

3. Treść rozprawy i uzyskane wyniki

Pierwsze dwa rozdziały pracy poświęcone są wprowadzeniu definicji i pojęć, na których oparta jest dalsza część rozprawy. W szczególności rozdział 1 to preliminaria obejmujące podstawowe pojęcia topologiczne, natomiast rozdział 2 dotyczy kombinatorycznych pól wielowektorowych. Pola te są kluczowym pojęciem rozprawy, pozwalają one na reprezentację dynamiki w postaci skończonych grafów. Oczywiście konieczne jest zdefiniowanie odpowiedników klasycznych pojęć dynamiki, takich jak orbita czy szerzej rozwiązanie, część niezmiennicza, zbiór izolujący, itd. Równie ważne jest określenie badanej klasy układów dynamicznych (potoki dopuszczalne) i związanych z nimi specjalnych kombinatorycznych pól wielowektorowych zbudowanych z komórek. Teoria kombinatorycznych pól wielowektorowych była już dostępna dla doktoranta i mogła zostać z sukcesem użyta, dzięki wcześniejszym pracom promotora i jego współpracowników. Natomiast algorytmizacja pewnych procedur była wciąż kwestią otwartą i ona właśnie jest głównym przedmiotem rozprawy.

Rozdział 3 pracy zawiera konstrukcję wielowektorowych pól, które są jednocześnie dopuszczalnymi rozkładami komórkowymi dla powierzchni zamkniętych. Realizacja tego celu opiera się w dużej części na identyfikacji krawędzi transversalnych, które wskazują kierunek rozpatrywanego pola wektorowego. Rozdział zamyka prezentacja algorytmu znajdowania kombinatorycznego przekroju Poincarégo dla rozpatrywanego pola wielowektorowego.

Ogólny dalszy plan działania wygląda w zarysie następująco: pole wielowektorowe związane z dekompozycją komórkową może być wykorzystywane do znajdowania pewnych izolowanych otoczeń w wyjściowym polu. Jeśli zaś otoczenie izolujące mające indeks Conleya taki, jak dla hiperbolicznej orbity periodycznej, dopuszcza przekrój Poincarégo, to istnieje w nim orbita periodyczna. Znalezienie kombinatorycznego przekroju Poincarégo pozwala właśnie na stwierdzenie istnienia przekroju Poincarégo dla wyjściowego układu dynamicznego, a co za tym idzie, jego orbity periodycznej.

Rozdział 4 skoncentrowany jest na kompleksach symplecjalnych i dotyczy znajdowania właściwej triangulacji, która prowadziłaby do pożądanых re-

zultatów dla możliwie dużej klasy układów dynamicznych. Zaprezentowane są dwa podejścia. Pierwsze bazuje na koncepcji tzw. transversalnych wielościanów, drugi zaś na idei dyspersji pola wektorowego.

Finalny rozdział 5 stanowi podsumowanie przeprowadzonych rozważań. Zawiera on szczegółowy schemat działań prowadzących do znajdowania orbit periodycznych, a także przykłady jego zastosowania.

W końcowej części rozprawy zawarty jest też interesujący plan dalszego rozwoju zaproponowanego podejścia, poprzez przeniesienie zastosowanych technik na przypadek 3-wymiarowy.

Doktorant spełnił wymóg formalny posiadania autorstwa przynajmniej jednego artykułu naukowego. Wyniki zawarte w pracy zostały opublikowane w niedawno powstałym, a już renomowanym czasopiśmie J Appl. and Comput. Topology (por. pozycja [24] w bibliografii), a doktorant jest pierwszym autorem:

Donald Woukeng, Damian Sadowski, Jakub Leśkiewicz, Michał Lipiński, and Tomasz Kapela, *Rigorous computation in dynamics based on topological methods for multivector fields* J Appl. and Comput. Topology (2023). <https://doi.org/10.1007/s41468-023-00149-2>, pages 1–34.

5. Ocena pracy

Doktorant wykazał się wysokimi umiejętnościami matematycznymi, przedstawiając metodę automatycznej detekcji orbit w układach dwuwymiarowych przy pomocy połączenia metod topologicznych, kombinatorycznych i technik algorytmicznych.

Praca jest starannie napisana, wszystkie występujące w niej pojęcia i używane twierdzenia zostały wprowadzone w początkowych rozdziałach. Docenić należy także sugestywne grafiki ilustrujące topologiczne rozważania.

W rozprawie brakowało mi natomiast ukazania przez doktoranta nieco szerszej perspektywy naukowej. W szczególności nader lakonicznie potraktowana została kwestia, jak wyniki doktoranta mają się do innych badań w tej tematyce.

Pewien niedosyt budzą również zastosowania opracowanej metody. Autor ukazuje ją w zasadzie wyłącznie na "testowych" układach, nie licząc przykładów związanych z równaniem Van der Pola. Problem znajdowania orbit periodycznych jest ważny zarówno w teorii układów dynamicznych i równań różniczkowych, jak też w licznych zastosowaniach, na przykład w fizyce, inżynierii czy naukach biomedycznych. Interesujące byłoby zatem wykorzystać opracowaną metodę do wykrywania orbit dla układów rozpatrywanych w tych dziedzinach, dla których ich istnienie lub lokalizacja nie są znane.

6. Konkluzja recenzji

Przedstawioną rozprawę doktorską oceniam pozytywnie, potwierdza ona predyspozycje doktoranta do prowadzenia pracy naukowej. Autor rozważa w niej ważny problem matematyczny dotyczący komuterowo wspomaganej detekcji orbit periodycznych i przedstawia jego rozwiązanie.

W mojej opinii rozprawa spełnia wszystkie wymagania określone w art. 187 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce. Wnoszę o jej dopuszczenie do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Grzegorz Graff
(podpisano elektronicznie)