GRY W KOLOROWANIE

GABRIEL JAKÓBCZAK

Większościowym kolorowaniem grafu nazywamy takie pokoloro-wanie jego wierzchołków, że dla każdego wierzchołka v co najmniej połowa sąsiadów v ma inny kolor niż v. Niech $\mu(G)$ oznacza najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do większościowego pokolorowania grafu G. Ogólnie znane i łatwe do wykazania jest, że $\mu(G) \leq 2$ dla każdego grafu G. Rozważymy rozgrywany wariant tego parametru, *rozgrywaną większościową liczbę chromatyczną* $\mu_g(G)$, zdefiniowaną poprzez dwuosobową grę w kolorowanie, w której jeden z graczy próbuje uzyskać większościowe kolorowanie całego grafu, podczas gdy drugi dąży do zapobiegnięcia temu. Udowodnimy, że dla każdej liczby całkowitej n istnieje taki graf dwudzielny $G(n)$, że jego rozgrywana większościowa liczba chromatyczna jest większa niż n. Pokażemy konstrukcję takiej rodziny grafów. Z tego faktu wynika, że w ogólnym przypadku parametr $\mu_g(G)$ jest nieograniczony pomimo bardzo mocnego ograniczenia w wersji nierozgrywanej. Z drugiej strony wskażemy, że badany parametr $\mu_g(G)$ jest zawsze ograniczony przez $\mathrm{col}_g(G)$, rozgrywaną liczbę kolorującą grafu G. W kolejnych wynikach poprawimy to ograniczenie dla niektórych klas grafów. W szczególności udowodnimy, że rozgrywana większościowa liczba chromatyczna jest ograniczona przez 3 dla każdego drzewa binarnego T, a także podamy przykład takiego drzewa, dla którego wymagane są wszystkie 3 kolory. W kolejnym twierdzeniu udowodnimy, że rozgrywana większościowa liczba chromatyczna podpodziału dowolnego grafu prostego jest również ograniczona przez 3. Wyniki mogą sugerować, że $\mu_g(G)$ jest ograniczony dla grafów o ograniczonej liczbie kolorującej $\mathrm{col}(G)$. Udowodnimy jednak również, że wbrew tej intuicji, dla każdej liczby całkowitej k istnieje graf o liczbie kolorującej równej 3 i większościowej liczbie chromatycznej większej niż k. Zaprezentujemy konstrukcję takiej rodziny grafów.

Przedstawimy również zupełnie nowy wariant gry w kolorowanie z dodatkową zasadą, że w każdym momencie gry pokolorowana część grafu musi być jego spójnym podgrafem. Zdefiniujemy analogiczny parametr *spójnej rozgrywanej liczby chromatycznej* oznaczony jako $\chi_c(G)$. Wskażemy kilka istniejących strategii, używanych w oryginalnej grze, które można dostosować do nowej modyfikacji. Ograniczymy ten parametr dla niektórych szczególnych klas grafów, takich jak rodzina grafów dwudzielnych, pokazując, że nowy wariant jest grą znacznie różniącą się od swojego pierwotnego odpowiednika. Udowodnimy również, że dla każdego grafu zewnętrznie planarnego, jego spójna rozgrywana liczba chromatyczna jest zawsze mniejsza lub równa 6. Poprawimy to ograniczenie dla striangulowanych grafów zewnętrznie planarnych, pokazując, że dla takiej klasy spójna rozgrywana liczba chromatyczna jest ograniczona przez 5. Przedstawimy również przykład striangulowanego grafu zewnętrznie planarnego ze spójną rozgrywaną liczbą chromatyczną równą 5, pokazując, że ostatnie ograniczenie jest silne. Nasz ostatni wynik pokazuje, że dla każdej liczby całkowitej k istnieje graf o liczbie kolorującej równej 4 oraz spójnej rozgrywanej liczbie chromatycznej większej niż k. Ponownie podajemy pełną konstrukcję takiej rodziny grafów. Na podstawie zbadanych rodzin grafów postawimy hipotezę, że dla dowolnego grafu jego spójna rozgrywana liczba chromatyczna jest biewiększa od swojego klasycznego odpowiednika: $\chi_c(G) \leq \chi_g(G)$.

Gabriel Jakóbczak