dr hab. Łukasz Pańkowski, prof. UAM
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwerstytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Poznań, 04.06.2024

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana mgra Krystiana Gajdzicy

Arithmetic properties of A-partition functions

Rozprawa doktorska mgra Krystiana Gajdzicy składa się z sześciu rozdziałów i głównie opisuje wyniki opublikowane w pracach naukowych, których autorem lub współautorem jest p. Gajdzica. Zgodnie z tematem rozprawy dotyczy ona pewnych własności tzw. funkcji A-partycji. Standardowa funkcja partycji $p(n)$ zwraca liczbę możliwych reprezentacji liczby n jako sumy liczb naturalnych. Badanie funkcji $p(n)$ jest już klasycznych zagadnieniem, którego podejmowali się liczni matematycy np. Eulera, Ramanujana, czy Erdős. Głównym obiektem badawczym recenzowanej rozprawy jest funkcja $p_A(n)$ związana z danym multizbiorem A składającym się z liczb naturalnych. Jest to funkcja będąca uogólnieniem funkcji $p(n)$, która dla danego multizbioru A i liczby naturalnej n zwraca liczbę możliwych przedstawień liczby n jako sumy liczb będących elementami multizbioru A. Jest to o tyle interesujący obiekt, że dobierając odpowiednio multizbiór A otrzymujemy dobrze znane w literaturze funkcje partycji np. funkcję $p(n)$, funkcję zwracającą liczbę partycji m-arnych, czy funkcję $pp(n)$ liczącą tzw. "plane partitions'. Autor rozprawy w głównej mierze zajmuje się zagadnieniami związanymi z analogiem nierówności $p(a)p(b) > p(a+b)$ udowodnionej przez Bessenrodta i Ono oraz z własnością logarytmicznej wklęsłości funkcji $p_A(n)$, czyli spełnianiem nierówności $p_A^2(n) > p_A(n+1)p_A(n-1)$. Wyniki swoich badań autor prezentuje w pięciu ostatnich rozdziałach rozprawy, podczas gdy rozdział pierwszy poświęcony jest pojęciom wstępnym i przytoczeniu znanych faktów dotyczących funkcji A-partycji, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy.

Rozdział 2 poświęcony jest nierówności Bessenrodta-Ono i własności logarytmicznej wklęsłości dla funkcji $p_A(n)$, gdzie A jest skończonym multizbiorem. Kluczowym elementem tych rozważań jest założenie o skończoności zbioru A, ponieważ w tym przypadku znane są formuły asymptotyczne dla funkcji $p_A(n)$, dzięki którym funkcję tę można zapisać jako pewien quasi-wielomian $c_{k-1}(n)n^{k-1} + \ldots + c_0(n)$, gdzie współczynniki zależą od klasy reszt liczby n mod $\operatorname{nww}(A)$ oraz k oznacza liczbę elementów multizbioru A. Ponadto kluczową rolę w tym rozdziale odgrywa znany fakt, że wszystkie współczynniki stojące przy n^i, $i \geqslant j-1$, nie zależą od n, o ile dla każdego j-elementowego podzbioru B zbioru A mamy $\operatorname{nwd}(B) = 1$. Fakty te wraz z pewnymi technicznymi oszacowaniami w dosyć bezpośredni sposób pozwalają na uzyskanie nierówności Bessenrodta-Ono $p_A(a)p_A(b) > p_A(a+b)$ dla dostatecznie dużych a, b, o ile $\operatorname{nwd}(A) = 1$ oraz $k \geqslant 2$. Nieco subtelniejsze zastosowanie powyższych faktów (dla $j = k-2$) pozwoliło autorowi uzyskać własność logarytmicznej wklęsłości funkcji $p_A(n)$, o ile $k = 2$ i $A = \{1, 1\}$ lub $k \geqslant 3$ i dla każdego $(k-2)$-elementowego podzbioru B zbioru A mamy $\operatorname{nwd}(B) = 1$. Warto tutaj zaznaczyć, że autor przedstawił również odpowiedni argument pokazujący, że wspomniane założenia dotyczące zbioru A i ich podzbiorów są również konieczne. W dalszej części tego rozdziału autor pokazuje, że zastosowane techniki pozwalają, przy nieco dokładniejszej analizie, otrzymać pewne rozszerzenia logarytmicznej wklęsłości tj. logarytmiczną wklęsłość dla funkcji $p_A(n)/n^\alpha$ dla $\alpha > 0$ oraz silną logarytmiczną wklęsłość tzn. nierówność $p_A^2(n) > p_A(n+m)p_A(n-m)$. W kolejnych podrozdziałach Rozdziału 2 p. Gajdzica dowodzi techniczne bardziej złożone własności funkcji $p_A(n)$ dla skończonego multizbioru A, które znane były dla klasycznej funkcji partycji. Dokładniej mówiąc, podaje on dosyć dokładny opis dla jakich skończonych multizbiorów A funkcja $p_A(n)$ jest r-logarytmicznie wklęsła oraz spełnia pewne nierówności Turána i Laguerre'a. W tych trzech przypadkach autor po raz kolejny zauważa, że punktem wyjścia jest możliwość przedstawienia funkcji A-partycji jako quasi-wielomianu, gdzie, przy odpowiednio silnym założeniu dotyczącym względnej pierwszości podzbiorów zbioru A, współczynniki przy najwyższych potęgach nie zależą od n. W celu podkreślenia tej obserwacji autor dowodzi te nierówności nie tylko dla funkcji partycji, ale dla dowolnych quasi-wielomianów, których współczynniki przy najwyższych potęgach nie zależą od n. Również te nierówności dla funkcji $p_A(n)$ są poparte odpowiednimi przykładami i dyskusjami pozwalającymi lepiej zrozumieć, na ile założenia istniejące w otrzymanych wynikach są konieczne. Wyniki otrzymane w Rozdziale 2 zostały zawarte w trzech samodzielnych artykułach p. Gajdzicy, które zostały już opublikowane lub są gotowe do publikacji.

W Rozdziale 3 autor podejmuje próbę podania warunków dostatecznych na to, aby nierówność Bessenrodta-Ono i logarytmiczna wklęsłość zachodziły dla funkcji $p_A(n)$ również w przypadku, gdy A jest zbiorem nieskończonym. Jak jednak wiadomo przypadek ten jest znacznie bardziej skomplikowany, ponieważ nie możemy oczekiwać w nim, że funkcja $p_A(n)$ jest quasi-wielomianem. Wiadomo jednak, że dla nieskończonych multizbiorów A funkcja $p_A(n)$ ma superwielomianowy wzrost. Dlatego też autor w tym rozdziale skupia się głównie na warunkach jakie musi spełniać funkcja $f(n)$, aby dla funkcji $F(n)$ można było uzyskać nierówność Bessenrodta-Ono i logarytmiczną wklęsłość, gdzie $c_1(n)e^{f(n)} < F(n) < c_2(n)e^{f(n)}$. Przedstawione warunki dostateczne wydają się dosyć silne, ale, jak pokazuje autor, pozwalają one odtworzyć powyższe nierówności dla standardowej funkcji partycji. Korzystając z dosyć ogólnego spojrzenia zaproponowanego w tym rozdziale autor przedstawia również pewne wyniki pozwalające zrozumieć zależność obu tych nierówności tzn. nierówności Bessenrodta-Ono i logarytmicznej wklęsłości. Również w tym przypadku możemy znaleźć liczne i ciekawe przykłady znacznie ułatwiające lekturę rozprawy. Wyniki z Rozdziału 3 zostały umieszczone w opublikowanej niedawno w Annals of Combinatorics pracy wspólnej z promotorami p. Gajdzicy.

Ze względu na brak odpowiednich formuł pozwalających z powodzeniem zastosować dla funkcji $p_A(n)$ wyniki przedstawione w Rozdziale 3, autor rozprawy w Rozdziale 4 stosuje pewne argumenty kombinatoryczne do uzyskania badanych nierówności w przypadku, gdy A jest multizbiorem nieskończonym. Pomysłową i kluczową obserwacją pozwalającą badać w ten sposób nierówność Bessenrodta-Ono jest Twierdzenie 4.2.3, gdzie autor dowodzi, że wiedząc, że nierówność ta zachodzi dla wszystkich argumentów z pewnego skończonego zakresu można udowodnić jej prawdziwość dla wszystkich dostatecznie dużych argumentów funkcji $p_A(n)$ dla zbiorów skończonych lub nieskończonych $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, gdzie elementy są ustawione w porządku rosnącym, $a_1 = 1$, $2a_2 \leqslant a_3$ oraz $a_{l+1} - a_l \geqslant a_3$ dla każdego $l \geqslant 3$. Wynik ten, o ile nie jest bezwarunkowy, bo zależy od konieczności sprawdzenia prawdziwości nierówności Bessenrodta-Ono dla pewnego skończonego zbioru argumentów, pozwala udowodnić bezwarunkowo prawdziwość tej nierówności dla pewnych szczególnych funkcji partycji. Autor pokazuje to dla przypadku, gdy $A = \{m^i : i \in \mathbb{N}\}$ lub $A = \{n^m : n \in \mathbb{N}\}$ dla $m \geqslant 2$. Wyniki te zostały zawarte w przygotowanej do druku samodzielnej pracy p. Gajdzicy.

Rozdział 5 poświęcony jest tzw. polinomizacji nierówności Bessenrodta-Ono. Mianowicie, wiadome jest, że można zdefiniować w sposób rekurencyjny wielomiany $P_n(x)$ o współczynnikach całkowitych i stopniu n, tak aby $P_n(k) = p_{-k}(n)$, gdzie $p_{-k}(n)$ liczy liczbę tzw. k-kolorowych partycji liczby n. Wówczas, jak pokazali Heim, Neuhauser i Tröger, nierówność Bessenrodta-Ono można rozszerzyć do nierówności $P_a(x)P_b(x) > P_{a+b}(x)$. W rodziale tym autor definiuje wielomiany $f_{A,n}(x)$ realizujące polinomizację funkcji $p_A(n)$, w szczególności $f_{A,n}(1) = p_A(n)$. Za główny wynik tego rozdziału można uznać udowodnienie nierówności Bessenrodta-Ono dla wielomianów $f_{A,n}(x)$ i $x \geqslant 5$, gdzie w zbiorze A liczba 1 występuje jednokrotnie, a pozostałe liczby naturalne j występują nie więcej j razy. W ostatnim podrozdziale Rozdziału 5 autor rozprawy przedstawia wyniki pokazujące, na ile ogólne jest zastosowane podejście. Mianowicie, przedstawione są badania warunków dostatecznych pewnych dosyć ogólnych funkcji zdefiniowanych w sposób rekurencyjny (podobny do równości rekurencyjnych zachodzących dla $f_{A,n}(x)$) na to, aby zachodził dla nich analog nierówności Bessenrodta-Ono. Wyniki przedstawione w tym rozdziale zostały zawarte w dwóch artykułach, w których współautorami byli między innymi Heim i Neuhauser.

Ostatni rozdział rozprawy dotyczy pewnych własności podzielności wartości funkcji $p_A(n)$. Głównym badanym zagadnieniem jest gęstość zbioru $\{n \in \mathbb{N} : m \nmid p_A(n)\}$, $m \geqslant 2$. Pierwszym wynikiem dotyczącym gęstości powyższego zbioru dla $m = 2$ jest udowodnienie dla nieskończenie wielu k, że

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sharp\{n \leqslant N : p_{A_k}(n) \equiv 1 \bmod 2\}}{N} \leqslant \frac{2}{3},$$

gdzie $A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ oraz $A_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Następnie w celu uzyskania dolnego oszacowania gęstości powyższego zbioru p. Gajdzica pokazał, że nie istnieją zbyt długie ciągi kolejnych liczb naturalnych n, dla których $m | p_{A_k}(n)$. Bezpośrednią konsekwencją tego faktu jest nierówność

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sharp\{n \leqslant N : p_{A_k}(n) \not\equiv 0 \bmod m\}}{N} \geqslant \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_i}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Rozdział 6 zakończony jest serią pewnych wyników dotyczących podzielności wartości $p_{M_k}(n)$, gdzie M składa się z kolejnych potęg liczby m.

Podsumowanie. Pan mgr Krystian Gajdzica jest autorem ośmiu prac naukowych, których wyniki są częścią recenzowanej rozprawy doktorskiej. Większość z nich została już opublikowana lub przyjęta do druku w dobrych międzynarodowych czasopismach specjalistycznych dotyczących teorii liczb i kombinatoryki. Dwie prace napisane są wspólnie z matematykami z innych ośrodków naukowych, co świadczy o zauważeniu wcześniejszych samodzielnych wyników p. Gajdzicy przez specjalistów zajmujących się zagadnieniem partycji liczb. Prace naukowe autora rozprawy świadczą o jego wyraźnej samodzielności w prowadzeniu badań oraz o umiejętności nawiązywania współpracy z innymi matematykami. Bardzo dobrze mówi to o dojrzałości matematycznej mgra Krystiana Gajdzicy. Sama rozprawa doktorska napisana jest niezwykle starannie. Praktycznie trudno znaleźć w niej jakiekolwiek usterki. Dowody przeprowadzone sa wyjątkowo starannie i z dużym wyczuciem, co znacząco ułatwia śledzenie argumentów przedstawionych w rozprawie. Jest to niezwykle rzadkie na tym etapie kariery naukowej. Uważam, że problem zbadania własności A-partycji, postawiony przed p. Gajdzicą, został przez niego zrealizowany dosyć kompletnie. Przedstawione wyniki, zwłaszcza te z początkowych rozdziałów rozprawy, są lub wydają się być optymalne, więc w pełni odpowiadają na postawione pytania. Zaprezentowane ciekawe przykłady pokazują również, że autor rozprawy dosyć dobrze przeanalizował szczególne i skrajne przypadki dla danego zagadnienia. Ich dobór jest bardzo trafny, co pozwala bardzo dobrze rozpoznać siłę danego wyniku. Metody dowodowe stosowane w rozprawie można uznać za dosyć klasyczne, ale nietrywialne. Trudno w pracy znaleźć bardzo nowoczesne i zaawansowane techniki dowodowe. Złożoność użytych argumentów polega tutaj raczej na dogłębnym zbadaniu i zrozumieniu natury badanych obiektów i obraniu odpowiedniej strategii dowodowej. Wszystko to świadczy o wysokim poziome matematycznym, dużej dojrzałości i bardzo dobrym opanowaniu technik dowodowych charakterystycznych dla tej tematyki. Podsumowując uważam, że **przedstawiona rozprawa spełnia z nawiązką ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie Pana mgra Krystiana Gajdzicy do dalszych etapów przewodu doktorskiego**.

Pańkowski Ł.