Kraków, 24 czerwca 2024

dr hab. Maciej Dołęga

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa

mdolega@impan.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgra Krystiana Gajdzicy
pt. *Arithmetic properties of A-partition functions*

Wstęp

Tematyka rozprawy mgra Krystiana Gajdzicy leży na styku dwóch dziedzin: teorii liczb i kombinatoryki enumeratywnej. Głównym obiektem badań opisanych w niniejszej rozprawie jest tzw. funkcja A-partycji, która uogólnia klasyczną funkcję partycji Eulera do dowolnego multizbioru A. Funkcja partycji $p(n)$ zlicza wszystkie sposoby przedstawienia liczby n jako sumy dodatnich liczb naturalnych i jej funkcja tworząca zdefiniowana jest następującą równością szeregów potęgowych

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-1}.$$

Funkcja A-partycji zlicza „pokolorowane” partycje, których części przyjmują wartości w multizbiorze A, zaś liczba możliwych pokolorowań części $a \in A$, odpowiada jej krotności w multizbiorze A. Mówiąc bardziej precyzyjnie funkcja tworząca A-partycji zdefiniowana jest następującą równością szeregów potęgowych:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_A(n)q^n = \prod_{n\in A} (1-q^n)^{-1},$$

gdzie A jest multizbiorem dodatnich liczb całkowitych. Wybierając $A = \mathbb{N}_{>0}$ otrzymujemy klasyczną funkcję partycji. Tematem przewodnim recenzowanej rozprawy jest próba uogólnienia różnych znanych wyników dotyczących funkcji partycji do bardziej ogólnego przypadku funkcji A-partycji. W pierwszej części rozprawy Pan Gajdzica bada własność log-wklęsłości, oraz tzw. nierówność Bessenrodt–Ono dla funkcji A-partycji, oraz podaje pełną charakteryzację skończonych multizbiorów A dla których one zachodzą. Następnie dowodzi analogicznych twierdzeń dla nieco bardziej skomplikowanych nierówności, mianowicie dla tzw. r-log wklęsłości, nierówności Turána, oraz wyższych nierówności Laguerre'a. W ostatniej części rozprawy autor bada gęstość nieparzystych wartości funkcji A-partycji dla skończonych multizbiorów A.

Przedstawione w rozprawie wyniki oparte są na pięciu pracach, które zostały już opublikowane lub przyjęte do druku, oraz dwóch preprintach dostępnych na platformie *arXiv* (dodatkowo fragment piątego rozdziału rozprawy oparty jest na częściowych wynikach nad którymi Pan Gajdzica wciąż pracuje wspólnie z B. Heimem, M. Neuhauserem oraz B. Żmiją). Prace te ukazały się w dobrych i bardzo dobrych czasopismach specjalistycznych takich jak *Discrete Math., J. Number Theory, Res. Number Theory, Annals of Combinatorics*. Spośród tych siedmiu prac jedynie dwie są współautorskie (jedna z nich napisana wspólnie z P. Miską i M. Ulasem, którzy są kolejno promotorem pomocniczym oraz promotorem Pana Gajdzicy, a jedna napisana wspólnie z B. Heimem oraz M. Neuhauserem). W mojej opinii jest to imponujący dorobek na tak wczesnym etapie kariery naukowej. Ponadto tematyka log-wklęsłości w kontekście kombinatoryki enumeratywnej i geometrii dyskretnej jest niezwykle szybko rozwijającą się i obecnie bardzo popularną dziedziną matematyki o czym świadczy chociażby medal Fieldsa przyznany June'owi Huh w 2024 za jego osiągnięcia w tej dziedzinie. Doktorant uogólnia względnie świeże wyniki takich specjalistów jak Ken Ono, czy Igor Pak, co dodatkowo podkreśla iż podjęta w pracy doktorskiej tematyka cieszy się zainteresowaniem na świecie.

Zanim przejdę do szczegółowego omówienia wyników nadmienię iż dysertacja została napisana bardzo starannie. Autor wprowadza czytelnika do tematyki swoich badań prezentując dotychczasowe istotne wyniki w tej dziedzinie, podając liczne przykłady i szczegółowo wyjaśniając motywacje stojące za podjętą problematyką, co mocno ułatwia lekturę niespecjalistom. Każdy rozdział rozpoczyna się krótkim omówieniem przedstawionych w nim wyników, które ponadto opatrzone są licznymi komentarzami na temat tego jak potencjalnie można by je wzmocnić, lub dlaczego (jeśli w ogóle) nie są one optymalne. Podsumowując, czytanie przedstawionej pracy doktorskiej było przyjemnością i w mojej opinii redakcja przedstawionego tekstu jest absolutnie wzorowa.

Omówienie i ocena wyników

Oryginalne wyniki otrzymane przez Pana Gajdzice przedstawione są w rozdziałach 2–6. Główną motywacją do badań przedstawionych w rozdziale drugim są następujące dwie nierówności zachodzące dla klasycznej funkcji partycji. Pierwsza z nich to twierdzenie Nicolas'a z 1978 pokazujące że funkcja partycji $(p(n))_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem log-wklęsłym dla $n \geqslant 26$, oraz wynik Bessenrodt–Ono z 2016 dowodzący następującej nierówności:

$$p(a)p(b) > p(a+b), \quad a, b \geqslant 2, a+b > 9,$$

zwanej dalej nierównością Bessenrodt–Ono. Autor dysertacji bada problem log-wklęsłości, oraz nierówność Bessenrodt–Ono dla funkcji A-partycji $p_A(n)_{n\geqslant 1}$ w przypadku gdy A jest multizbiorem skończonym. Główne twierdzenia to klasyfikacja skończonych multizbiorów dla których te nierówności zachodzą. Autor pokazuje że nierówność Bessenrodt–Ono zachodzi dla skończonych A wtedy i tylko wtedy gdy $|A| \geqslant 2$ i $gcd(A) = 1$, zaś ciąg $(p_A(n))_{n\geqslant 1}$ jest log-wklęsły dla odpowiednio dużych n wtedy i tylko wtedy gdy $A = \{1, 1\}$ lub $|A| = k \geqslant 3$ i $gcd(B) = 1$ dla każdego $k-2$-elementowego podzbioru $B \subset A$. Następnie autor bada różne warianty log-wklęsłości, np. nierówności typu $p_A(n)^2 > p_A(n-m)p_A(n+m)$ dla $m \geqslant 1$, $p_A(n) > \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) p_A(n-1)p_A(n+1)$, czy log-wklęsłość ciągu $\frac{p_A(n)}{n^\alpha}$. We wszystkich tych przypadkach nierówność udowodniona jest dla skończonych multizbiorów A spełniających niemal te same warunki które gwarantują log-wklęsłość. W ostatnich dwóch podrozdziałach autor bada kolejno r-log-wklęsłość, oraz nierówność Turána wyższego rzędu. Mówiąc dość oględnie, r-log-wklęsłość jest własnością dodatniości elementów ciągów otrzymanych poprzez r iteracji operacji $(x_i)_{i\geqslant 0} \mapsto (x_{i+1}^2 - x_i x_{i+2})_{i\geqslant 0}$. W szczególności 1-log wklęsłość jest po prostu log-wklęsłością. Definicja nierówności Turána wyższego rzędu jest znacznie bardziej skomplikowana, więc nadmienię jedynie że nierówności Turána drugiego rzędu jest ponownie log-wklęsłością, lecz ze słabymi nierównościami, natomiast wyższe nierówności pojawiają się naturalnie w kontekście badania położenia pierwiastków tak zwanych wielomianów Jensena przesuniętych o zadany ciąg. Hou i Zhang udowodnili w 2016, że funkcja partycji $p(n)$ jest asymptotycznie r-log-wklęsła dla wszystkich $r \geqslant 1$, natomiast Griffin, Ono, Rolen i Zagier udowodnili wyższe nierówności dla $p(n)$ i odpowiednio dużych n. W przypadku skończonego multizbioru A Pan Gajdzica dowodzi iż dla ustalonego r i multizbioru $|A| = k$, funkcja A-partycji $p_A(n)$ jest asymptotycznie r-log-wklęsła wtedy i tylko wtedy gdy $gcd(B) = 1$ dla każdego $k - 2r$-elementowego podzbioru $B \subset A$. W przypadku wyższych nierówności Turána Pan Gajdzica dowodzi dostatecznego warunku, który mówi że dla multizbioru $|A| = k$ oraz ustalonego $1 \leqslant d < k$ funkcja A-partycji $p_A(n)$ spełnia nierówność Turána rzędu j dla każdego $1 \leqslant j \leqslant d$ gdy $gcd(B) = 1$ dla każdego $k-d$-elementowego podzbioru $B \subset A$. Wszystkie te wyniki zostały udowodnione dość elementarnymi metodami, co może zaskakiwać biorąc pod uwagę jak bardzo ogólną klasyfikację udało się otrzymać autorowi. Główny pomysł polega na analizie zachowania badanych nierówności dla ciągów które potrafimy ograniczyć z dołu i z góry kwaziwielomianami, których dominujące części są znane. Ta strategia dobrze działa dla funkcji $p_A(n)$ w przypadku skończonego multizbioru A, gdyż Cimpoeaş i Nicolae znaleźli jawny wzór wyrażający $p_A(n)$ jako kwaziwielomian. Elementarna, lecz pomysłowa i elegancka analiza prowadzi autora do przedstawionych wyników.

W kolejnym rozdziale autor stawia naturalne pytanie: co można powiedzieć o log-wklęsłości i nierówności Bessenrodt–Ono dla funkcji A-partycji gdy multizbiór A jest nieskończony? Podobnie jak w poprzednim przypadku doktorant wykazuje, że jeśli kontroluje wzrost funkcji A-partycji to potrafi znaleźć warunki implikujące badane nierówności. W przeciwieństwie do przypadku skończonego multizbioru A dla którego wzrost funkcji A-partycji jest kwaziwielomianowy, nieskończony multizbiór A wymusza wzrost superwielomianowy. Autor wykazuje, że jeśli dla zadanej funkcji $F\colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ jej wzrost kontrolowany jest poprzez pewne funkcje $c_1, c_2, f\colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ w następujący sposób:

$$c_1(n)e^{f(n)} < F(n) < c_2(n)e^{f(n)},$$

to odpowiednie zachowanie funkcji c_1, c_2, f implikuje log-wklęsłość i nierówność Bessenrodt–Ono. Pan Gajdzica pokazuje jak zastosować to twierdzenie do przypadku klasycznej funkcji partycji, oraz w przypadku nierówności Bessenrodt–Ono do m-arnej funkcji partycji (łatwo pokazać że m-arna funkcja partycji nie może być log-wklęsła i jest to przykład ilustrujący fakt, że przy dodatkowych założeniach log-wklęsłość zawsze implikuje nierówność Bessenrodt–Ono, ale nie na odwrót).

Następne dwa rozdziały dowodzą nierówności Bessenrodt–Ono dla pewnych klas funkcji A-partycji, do których nie stosują się wyniki opisane wcześniej. W pierwszym z nich zastosowane jest podejście kombinatoryczne polegające na bezpośrednim skonstruowaniu iniekcji pomiędzy zbiorami które porównujemy. Oprócz m-arnej funkcji partycji, dla której nierówność Bessenrodt–Ono została udowodniona we wcześniejszym rozdziale, podejście kombinatoryczne pozwala również pracować ze zbiorem postaci $A_d := \{n^d\colon n \in \mathbb{N}_{>0}\}$, dla $d \geqslant 2$. W następnym rozdziale autor pokazuje nierówność Bessenrodt–Ono dla pewnych wielomianów $(f_A(x;n))_{n\geqslant 1}$ dla $x \geqslant 5$, odpowiednio dużych n, oraz multizbioru A który zawiera 1 i w którym każda liczba j występuje co najwyżej j razy. Skonstruowany wielomian $f_A(x;n)$ ma tę własność że $f_A(k;n)$ jest funkcją k-pokolorowanych A-partycji rozmiaru n dla każdego $k \geqslant 1$. Przedstawiony wynik istotnie uogólnia wcześniejsze wyniki Heima i Neuhausera, oraz Heima Neuhausera i Trögera.

Ostatni rozdział jest nieco inny i jest poświęcony badaniu parzystości funkcji A-partycji. W przypadku zbioru skończonego $[k] := \{1, \ldots, k\}$ Karhadkar udowodnił następujące ograniczenia na gęstość nieparzystych wartości funkcji $[k]$-partycji:

$$\frac{2}{k(k+1)} \leqslant \lim_{N\to\infty} \frac{|\{n \in [N]\colon p_{[k]}(n) \equiv 1 \pmod 2\}|}{N}$$

dla wszystkich liczb całkowitych $k \geqslant 1$, oraz

$$\frac{2}{3} \geqslant \lim_{N\to\infty} \frac{|\{n \in [N]\colon p_{[k]}(n) \equiv 1 \pmod 2\}|}{N}$$

dla nieskończenie wielu k. Wyniki przedstawione w tym rozdziale istotnie uogólniają twierdzenie Karhadkara zastępując zbiór $[k]$ dowolnym skończonym multizbiorem $A_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Pan Gajdzica dowiódł, że dla ustalonego $m \geqslant 2$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} a_i} \leqslant \lim_{N\to\infty} \frac{|\{n \in [N]\colon p_{A_k}(n) \not\equiv 0 \pmod m\}|}{N}$$

dla wszystkich liczb całkowitych $k \geqslant 1$, oraz

$$\frac{2}{3} \geqslant \lim_{N\to\infty} \frac{|\{n \in [N]\colon p_{A_k}(n) \equiv 1 \pmod 2\}|}{N}$$

dla nieskończenie wielu k (dla dowolnego ustalonego ciągu dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \dots$). Główna idea dowodu opiera się na analizie okresu ciągu $(p_{A_k}(n) \pmod m)_{n\geqslant 1}$, co jest możliwe dzięki twierdzeniu Kwonga które mówi jak znaleźć okres dowolnego ciągu liczb naturalnych modulo m przy założeniu że znamy okresy tego ciągu modulo potęgi liczb pierwszych dokładnie dzielących m.

Podsumowanie

Wyniki przedstawione w recenzowanej rozprawie doktorskiej w znacznej większości zostały już opublikowane w dobrych i bardzo dobrych specjalistycznych czasopismach naukowych i nie mam wątpliwości że materiał przedstawiony w rozdziale drugim i czwartym również zostanie w przyszłości opublikowany w dobrych czasopismach. Doktorant istotnie rozszerzył dotychczasowe wyniki dotyczące log-wklęsłości oraz nierówności Bessenrodt–Ono w kontekście funkcji A-partycji i wykazał się dogłębnym zrozumieniem natury badanych nierówności, o czym świadczy próba stosowania różnych metod do poszerzenia klasy multizbiorów A dla których zaobserwowane nierówności zachodzą. W mojej opinii dysertacja mgra Krystiana Gajdzicy zatytułowana “Arithmetic properties of A-partition functions ” spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. W związku z tym wnoszę o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Z poważaniem,

Maciej Wojciech Dołęga
Digitally signed by Maciej Wojciech Dołęga
Date: 2024.06.24 16:24:17 +02'00'

Maciej Dołęga