Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: jaroslaw.grytczuk@pw.edu.pl

Warszawa, 13.08.2024

Recenzja rozprawy doktorskiej Krystiana Gajdzicy

Arithmetic properties of A-partition functions

Praca doktorska Krystiana Gajdzicy bada kilka ciekawych problemów w obrębie teorii *partycji.* Jest to ważna, klasyczna dziedzina leżąca na styku teorii liczb i kombinatoryki, zapoczątkowana fundamentalnymi pracami Eulera, a rozwijana później m. in. przez Ramanujana, Hardy'ego, MacMahona, czy Rademachera. Posiada ona liczne powiązania i rozległe zastosowania, czasami w dość zaskakujących działach, jak np. mechanika statystyczna czy termodynamika.

Partycją (*podziałem*) liczby naturalnej n nazywamy dowolny zestaw liczb naturalnych sumujących się do n. Na przykład, liczba 5 ma następujące partycje:

$$11111, 1112, 113, 122, 14, 23, 5.$$

Oczywistym obiektem zainteresowania matematyków (począwszy od Eulera) jest funkcja $p(n)$ wyrażająca liczbę różnych partycji liczby n. O funkcji $p(n)$ wiemy już sporo, jednak wciąż kryje ona w sobie wiele tajemnic dostarczając nieustającej motywacji badaczom. Wymownym przykładem tego fenomenu jest właśnie rozprawa Krystiana Gajdzicy, której główne wyniki omówię skrótowo poniżej.

Właściwie cała rozprawa dotyczy następującego uogólnienia pojęcia partycji liczby naturalnej. Mamy zadany *multizbiór* liczb naturalnych A, w którym każda liczba ma określoną liczbę wystąpień (być może zero). Rozważamy teraz A-*partycje* liczby n, czyli takie partycje, których składniki są elementami multizbioru A. Dla lepszego wyobrażenia możemy myśleć, że wielokrotne kopie danego elementu $a \in A$ są pokolorowane, każda innym kolorem, co prowadzi do odpowiedniego zwielokrotnienia danej partycji. Na przykład, jeżeli krotność liczby 1 w multizbiorze A wynosi 2, a krotność liczby 3 wynosi 1, to zwykła partycja 113 liczby 5 generuje trzy kolorowe A-partycje:

$$113, 113, 113.$$

Analogicznie definiujemy funkcję $p_A(n)$ jako liczbę A-partycji liczby n. Warto podkreślić, że wiele naturalnych wariantów partycji (np. partycje *planarne*, k-*kolorowe*, m-*arne*, *potęgowe*, etc.) podpada pod schemat A-partycji z odpowiednim multizbiorem A. Naturalnym kierunkiem badań jest więc ustalenie które z własności tradycyjnej funkcji $p(n)$ pozostają prawdziwe dla wariantu kolorowego $p_A(n)$, ewentualnie pod jakimi warunkami nałożonymi na multizbiór A.

W swojej rozprawie autor koncentruje się na dwóch takich fundamentalnych własnościach. Pierwsza z nich to tzw. *wklęsłość logarytmiczna* (w skrócie *log-wklęsłość*) funkcji $p(n)$, która wyraża się nierównością

$$p(n)^2 > p(n-1)p(n+1),$$

dla $n > 25$. Druga zaś, to nierówność *Bessenrodta-Ono*:

$$p(a)p(b) > p(a+b),$$

która zachodzi dla wszystkich a, b spełniających warunki $a, b > 1$ i $a + b > 9$. Oba te wyniki uzyskano stosunkowo niedawno.

W rozdziale drugim rozprawy autor bada kiedy podobne własności zachodzą dla funkcji $p_A(n)$ (dla dostatecznie dużych n) w przypadku, gdy multizbiór A jest skończony. W Twierdzeniu 2.2.5 podaje eleganckie kryterium dla nierówności Bessenrodta-Ono sprowadzające się do prostego warunku $\mathrm{nwd}(A) = 1$ (oraz $|A| > 1$). W przypadku log-wklęsłości analogicznym kryterium (uzyskanym w Twierdzeniu 2.3.4) jest $\mathrm{nwd}(B) = 1$, gdzie B jest dowolnym pod(multi)zbiorem A liczności $|A| - 2$ (przy założeniu $|A| > 3$). Ponadto, autor bada także trzy podstawowe uogólnienia log-wklęsłości oraz trzy warianty wyższego rzędu (tzw. r-log-wklęsłość oraz nierówności Turána i Laguerre'a) uzyskując w każdym przypadku podobne kryteria (Twierdzenia 2.4.1-3, 2.5.1, 2.5.8, 2.5.11, 2.6.1, 2.7.5). Metody dowodowe to wyrafinowana kombinacja rozumowań elementarnych i analitycznych umiejętnie wykorzystująca znane wyniki, ich odpowiednie modyfikacje czy wzmocnienia, a także nowe rezultaty pomocnicze. Kluczową własnością jest tu tzw. *quasi-wielomianowość* funkcji $p_A(n)$ wynikająca ze skończoności multizbioru A. Większość wyników tej części rozprawy została opublikowana w *Journal of Number Theory* i *Research in Number Theory*.

Rozdział trzeci rozprawy dotyczy podobnych zagadnień, gdy multizbiór A jest nieskończony. Wówczas funkcja $p_A(n)$ ma wzrost ponad-wielomianowy, co sugeruje ogólniejsze podejście poprzez badanie klasy funkcji $F(n)$ spełniających nierówności:

$$c_1(n)e^{f(n)} < F(n) < c_2(n)e^{f(n)}.$$

W Twierdzeniach 3.2.1 i 3.3.1 znaleziono warunki implikujące log-wklęsłość i nierówność Bessenrodta-Ono dla takich funkcji. Ponadto, w Twierdzeniu 3.4.1 wskazano pod jakimi warunkami pierwsza z tych własności implikuje drugą. Podano także ciekawy przykład na to, że odwrotna implikacja nie zachodzi, bazujący na partycjach m-arnych (Twierdzenie 3.4.8). Wyniki te ukazały się w artykule opublikowanym w *Annals of Combinatorics*.

W rozdziale czwartym rozprawy autor podejmuje ciekawą kwestię poszukiwania czysto kombinatorycznych dowodów własności funkcji $p_A(n)$, a także stowarzyszonych z nimi tzw. rozszerzonych funkcji $\max p_A(n)$, zdefiniowanych jako maksimum po wszystkich A-partycjach liczby n z iloczynu wartości $p_A(k)$, gdzie k przebiega składniki danej partycji n. Na przykład,

$\max p(5) = 6$, gdyż $p(2) \cdot p(3) = 2 \cdot 3 = 6$ jest największą wartością spośród wszystkich uzyskanych w ten sposób na partycjach liczby 5. Uzyskane wyniki ogólne (Twierdzenia 4.2.1 i 4.2.3) ograniczają się do przypadku, gdy A jest zbiorem liczb naturalnych (nie multizbiorem), pozwalają jednak otrzymać nierówności Bessenrodta-Ono dla partycji m-arnych i potęgowych (Twierdzenia 4.3.4 i 4.4.2), co prowadzi do ciekawych konkluzji o ich funkcjach rozszerzonych $\max p_A(n)$ (Twierdzenia 4.3.5 i 4.4.3). Wyniki tej części pracy pochodzą z manuskryptu autora, który widnieje w znanym repozytorium internetowym arXiv.

Tematem kolejnego, piątego rozdziału są wielomianowe wersje nierówności typu Bessenrodta-Ono. Punktem wyjścia jest niedawny rezultat uogólniający tę nierówność na pewną rodzinę wielomianów $P_n(x)$ powiązanych z *k-kolorowymi* partycjami, czyli A-partycjami, gdzie A jest multizbiorem, w którym każda liczba ma krotność dokładnie k. Wielomiany te można także zdefiniować rekurencyjnie, bądź przy użyciu odpowiednich funkcji tworzących. Nierówność Bessenrodta-Ono dla $P_n(x)$ ma postać

$$P_a(x) \cdot P_b(x) > P_{a+b}(x)$$

i zachodzi dla wszystkich $x > 2$ oraz $a + b > 2$. Główny wynik tego rozdziału (Twierdzenie 5.3.4) stanowi eleganckie uogólnienie tej nierówności na wielomiany $f_{A,n}(x)$ zdefiniowane analogicznie dla dowolnych multizbiorów A (spełniających pewne drobne ograniczenia). Znajduje się on w pracy opublikowanej w *Annals of Combinatorics.*

Ostatni, szósty rozdział rozprawy dotyczy nieco innych własności partycji, nawiązujących do słynnych tożsamości kongruencyjnych Ramanujana oraz znanej hipotezy o równości asymptotycznej gęstości liczb n o parzystych i nieparzystych wartościach funkcji $p(n)$. Główne wyniki to uogólnienie dwóch twierdzeń szacujących gęstość dla wartości nieparzystych funkcji p_{N_k}, gdzie $N_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, na przypadek A_k, czyli prefiksu długości k dowolnego multizbioru A (Twierdzenia 6.3.2 i 6.4.2). Otrzymane oszacowania wymagały wielu pomocniczych rezultatów, które są ciekawe same w sobie. Wyniki te zostały opublikowane w *Discrete Mathematics.*

Rozprawa jest zredagowana bardzo dobrze, zawiera sporo przykładów, komentarzy, wykresów, znakomicie ilustrujących przedstawiany materiał. Czyta się ją z prawdziwą przyjemnością.

Podsumowując stwierdzam, że praca Krystiana Gajdzicy to bardzo dobry doktorat zawierający szereg nowych i wartościowych rezultatów dotyczących arcyciekawej tematyki A-partycji. Ich uzyskanie świadczy o świetnym opanowaniu warsztatu badawczego oraz znakomitej erudycji autora. Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Krystiana Gajdzicy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Jarosław Grytczuk