



UNIwersYTET IM. A. MICKIEWICZA  
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI  
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4  
61-614 Poznań  
<http://www.wmi.amu.edu.pl/>

ZAKŁAD MATEMATYKI DYSKRETNEJ  
prof. UAM dr. hab. Katarzyna  
Rybarczyk-Krzywdzińska  
Telefon: (61) 829 5398  
[kryba@amu.edu.pl](mailto:kryba@amu.edu.pl)

Poznań, 23 października 2023

## RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ PANA MGR GABRIELA JAKÓBCZAKA PT. GRAPH COLORING GAMES

### Omówienie zawartości pracy wraz z jej oceną

Recenzowana rozprawa doktorska, licząca 54 strony, składa się z abstraktu, streszczenia, jednego rozdziału wstępnego, trzech rozdziałów przedstawiających wyniki rozprawy, rozdziału podsumowującego oraz bibliografii, która obejmuje 24 pozycje.

W pierwszym, wstępnym rozdziale na stronach 6-9 przedstawiony jest rys historyczny problemów związanych z kolorowaniem. W dalszej części wstępu jest omówiona struktura pracy. Ta część pracy stanowi pewne sensowne wprowadzenie do problematyki pracy. Jednakże w mojej opinii brakuje w niej precyzyjnych informacji, cytowań, których można by się spodziewać w pracy doktorskiej. Na przykład podany jest wynik Robertson, Sanders, Seymour, Thomas bez odnośnika do źródła. Mało jest też nawiązań do wcześniej rozważanych problemów związanych ściślej z tematami rozważanymi w pracy. Dla porównania, w powiązanej, cytowanej pracy [12] jest o wiele szersza lista odnośników do literatury związanej z tematem. W dodatku styl pisanie w pierwszej części rozdziału bardziej pasuje do artykułu popularnonaukowego niż do pracy naukowej. Przykłady: „the expected euphoria soon turned into a great discussion”, „Unfortunately, this magazine was of popular nature”. Podsumowując, rozdział wprowadza w problematykę, lecz brakuje w nim niektórych konkretnych informacji a styl jest fragmentami nieadekwatny do pracy naukowej.

W drugim rozdziale zaprezentowane zostały definicje niezbędne do zrozumienia zagadnień omawianych w pracy. Przedstawione są w nim wszystkie niezbędne definicje. Jednak można

wiele zarzucić formie przedstawienia. Część definicji jest omówiona w tekście i część to formalne definicje. Nie ma jednak reguły. W dodatku:

1. Rozprawa jest napisana w języku angielskim, więc definicje powinny raczej być zaczerpnięte ze współcześnie wykorzystywanej literatury anglojęzycznej (np. „Graph theory” autorstwa Diestela lub Bondy, Murty) a nie z polskojęzycznego tłumaczenia Wydawnictwa Naukowego PWN [23].
2. Definicja grafu w drugim paragrafie str. 12 jest nieprecyzyjna. Praktycznie wygląda jak byśmy definiowali oznaczenie a nie graf. Brakuje w niej definicji multikrawędzi, które są przywoływane w przedostatniej linii na tej samej stronie.
3. Nie ma też precyzyjnej definicji składowych spójności. Zamiast tego jest nieprecyzyjne określenie „pieces”.
4. Definicja 2.1. nie ma sensu:  $c_i$  jest kolorem wybranym przez wierzchołek  $v_i$ , a z drugiej strony zbiór kolorów stanowi  $\{c_1, \dots, c_k\}$ ;
5. Definicja drzewa na stronie 15 jest niepoprawna. Drzewo to *spójny* graf bez cykli. A w definicji lasu zamiast składowych spójności pojawia się nieprecyzyjne określenie „disjoint parts”.
6. Definicja zbioru niezależnego na stronie 16 powinna być podana w kontekście pewnego grafu  $G(V, E)$  jako podzbiór jego wierzchołków.
7. W definicji grafu dwudzielnego (str. 16) nie zakłada się, że  $V_1$  i  $V_2$  są oba niepuste. Jeśli przyjmiemy, że muszą być niepuste, wtedy graf trywialny nie jest dwudzielny i na przykład bycie dwudzielnym nie byłoby równoważne nie posiadaniu nieparzystego cyklu.
8. Definicja grafu skierowanego na stronie 17. Nie znalazłam wykorzystania grafu skierowanego w pracy.
9. Definicja 2.9 w tej formie jest definicją coloring number, a nie game coloring number opisanej powyżej.

Rozdział 3 dotyczy rozgrywanej wersji kolorowania większościowego (ang. majority coloring). W kolorowaniu większościowym każdy wierzchołek ma co najwyżej połowę sąsiadów we własnym kolorze. W wersji rozgrywanej Alicja chce pokolorować graf zgodnie z zasadami kolorowania większościowego a Bob chce doprowadzić do takiego kolorowania częściowego, którego

nie można rozszerzyć zgodnie z zasadami kolorowania większościowego. Minimalną liczbę kolorów gwarantującą wygraną Alicji nazywamy rozgrywaną większością liczbą chromatyczną. Główny wynik rozdziału pokazuje, że w przypadku kolorowania większościowego nie ma ogólnego ograniczenia na liczbę kolorów gwarantujących wygraną Alicji. Jest to ciekawy rezultat w kontekście faktu, że dla każdego grafu zawsze istnieje zwykle większościowe kolorowanie dwoma kolorami. Kolejne wyniki dają pewne oszacowania na rozgrywaną większością liczbą chromatyczną. Przedstawione jest ogólne oszacowanie przez rozgrywaną liczbą kolorowania (ang. game coloring number), z którego wynikają pewne wnioski dotyczące większościowej liczby chromatycznej dla grafów planarnych i z ograniczonym rozrostem (ang. bounded expansion). Udowodniony jest też wynik dotyczący rozważanego parametru dla drzew. Techniki dowodowe nie wykorzystują zaawansowanej wiedzy ani z teorii gier ani nie wymagają głębokiej znajomości własności grafów. Do ich uzyskania potrzebna była jednak pewna kreatywność i zrozumienie niektórych aspektów rozpatrywanej gry.

Z usterek edytorskich w rozdziale 3 można wspomnieć, że tw. 3.3 dotyczy rozgrywanej liczby kolorowania, natomiast przed twierdzeniem cytowana jest definicja zwykłej liczby kolorowania (ang. coloring number). W dodatku w dowodzie grafy  $G_{2i(-1)}$  są  $(2^{i-1}, 2^{k-i+1})$ -masywne a na rysunku 5 są przedstawione jako  $(i, 2^{k-i+1})$ -masywne. Jednakże niewątpliwie jest to najlepiej zredagowany fragment pracy. Wynika to z tego, że jest on oparty na opublikowanym już artykule (B. Bosek, J. Grytczuk, G. Jakóbczak. Majority coloring game. *Discrete Applied Mathematics* vol 255 (2019), 15–20) i prawie w całości się z nim pokrywa.

Czwarty rozdział skupia się na rozgrywanej spójnej liczbie chromatycznej (ang. connected game chromatic number). Zarówno we wstępie jak i w rozdziale brakuje opisu motywacji do podjęcia akurat takiego problemu. We wstępnej części znajdują się obserwacje dające pewne ograniczenia na wielkość rozpatrywanego parametru. Dowody obserwacji 4.2, 4.3, 4.4 są elementarne. W dodatku nie uzasadnione jest przedstawianie dowodu 4.3, gdyż jest identyczny z 4.4. Obserwacje 4.6 i 4.8 pozostały bez konkretnego dowodu, ale z odnośnikiem do literatury. W mojej opinii praca by zyskała, gdyby w niej pojawił się chociaż szkic idei tych dowodów z opisem, na ile muszą być one zmodyfikowane, żeby zastosować je do rozgrywanej spójnej liczby chromatycznej. Świadczyłoby to o znajomości technik dowodowych z dziedziny i umiejętności ich adaptacji. Następny wynik nie jest sformułowany jednoznacznie w postaci żadnego faktu lub stwierdzenia. Moim zdaniem lepiej byłoby jakby dyskusja na stronach 36-37 była ujęta w postaci konkretnego faktu/twierdzenia z dowodem dotyczącego związku  $\text{col}$  z  $\text{col}'$ . Kolejny wynik pokazuje związek między rozgrywaną spójną liczbą chromatyczną a liczbą 2-kolorowania (ang. 2-coloring number). W dowodzie zaadoptowana jest metoda z pracy [5] wykorzystująca metodę aktywacji wprowadzoną w [18]. Następnie podjęta jest dyskusja na temat porządku

monetarnego też z [18], który implikuje pewne oszacowanie na rozrywaną spójną liczbę chromatyczną grafów planarnych. Wydaje się, że najistotniejszą częścią tego rozdziału są wyniki zawarte w kolejnych twierdzeniach 4.12–4.15. Pierwsze trzy dotyczą grafów zewnętrznie planarnych. W dowodzie oszacowań wykorzystano proste własności struktury grafów zewnętrznie planarnych. Ostatni wynik dotyczy grafów o liczbie kolorowania 4. Skonstruowana jest rodzina grafów o liczbie kolorowania 4, w której są zawarte grafy o dowolnie dużej rozgrywanej spójnej liczbie chromatycznej. Ten dowód jest bezsprzecznie najgorzej przedstawiony ze wszystkich w pracy. Nie jest precyzyjnie określone, jak łączymy wierzchołki z grupy wierzchołków typu  $w_i$  z wierzchołkami typu  $v_j$ . Można się tego domyślić z rysunku oraz dalszej części dowodu. Co nie zmienia faktu, że konstrukcja jest ciekawa. Nie znalazłam w tekście wzmianki o rysunku 12, który wydaje się zbędny.

Podobne wyniki do tych z rozdziału 4 zostały opublikowane w [10] i [12]. We wstępie dość obszernie są opisane różnice i podobieństwa uzyskanych wyników z tymi z [10] i [12]. Można uznać, że wyniki zostały uzyskane niezależnie.

Praca kończy się podsumowującym rozdziałem, w którym omawiane są problemy otwarte związane z tematem.

Rozprawa nie jest zredagowana dobrze od strony edytorskiej. Główne niedociągnięcia nie wspomniane jeszcze w recenzji :

1. Liczne literówki i błędy o podobnym charakterze. Przykłady:

- str. 3, l. -15: chapter -> Chapter;
- str 12, l. 6: vertices set -> vertex set;
- str 12, l. 10: nieghborhood -> neighborhood;
- str 16, l. 9: to k any -> to any k;
- str 31, l. 11: connected game coloring -> connected coloring game;
- str. 34, l. -9: brakuje inicjału w jednym z nazwisk z cytowania;
- str. 37, l. -13: Each that -> Each vertex that;
- str. 37, l. -9: it -> she;
- str. 37, l. -2: neighbor v -> neighbor of v;
- str. 49, l. -14: fo -> for.

2. Praca nie jest dobrze napisana pod względem językowym. Język nie zawsze jest adekwatny do pracy naukowej (np. wykorzystanie w kontekście wypowiedzi emocjonalnie

nacechowanych słów jak „unfortunately” na str. 8 i 18, „such situation is not so good for Bob” na str. 46). Występują niezmiernie liczne błędy w wykorzystaniu rodzajników (a,the,-). Poniżej podaję bardziej konkretne przykłady błędów językowych. W pracy jest ich znacznie więcej.

- str. 12, l. -5: chromatic number of the graph  $G$  -> the chromatic number of graph  $G$ ;
- str. 31, l. 5: the proper coloring of the  $G$  graph -> the proper coloring of graph  $G$ ;
- str. 32, l. 6: keep say -> keep saying;
- str. 38, l.-3: [5] of the year 2007 -> [5] from 2007;
- str. 41, l. -4: partition into some levels -> partition into levels;
- str. 42, l. 3: call ... as ... -> call ... a ...;
- str. 42, l. 6: call as lucky -> call lucky;
- str. 45, l. 3: w could -> w there could;
- str. 46, l. 2: in the moment of coloring by Alice -> at the moment of being colored by Alice;
- str. 46, l. 7: consider graph -> considered graph;
- str. 47, l. -4: determie -> determined;
- str. 47, l. -2: vertices type  $v_l$  -> vertices of type  $v_l$ ;
- str. 49, l. 15: To can avoid the consequences;
- str. 51, l. 3: the paper -> the dissertation.

Reasumując, rozprawa doktorska mgr. Gabriela Jakóbczaka zawiera nowe wyniki, które stanowią oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. Wyniki z rozdziału 3 zostały opublikowane w uznanym czasopiśmie międzynarodowym. Wyniki z rozdziału 4 zostały przedstawione na konferencji, lecz nie zostały opublikowane, gdyż zanim zostały zredagowane, ukazała się praca z podobnymi rezultatami. Z jednej strony może to świadczyć na niekorzyść, a z drugiej świadczy o tym, że problemy podjęte w prezentowanej pracy doktorskiej są aktualne i wzbudzają zainteresowanie. Uzyskane wyniki z rozdziału 3 nie wymagają dużej wiedzy z zakresu kolorowań, teorii gier na grafach, teorii grafów. Opierają się głównie na pomysłowości. Dotyczy to też niektórych rezultatów prezentowanych w rozdziale 4. Te rezultaty z rozdziału 4, które wykorzystywały bardziej zaawansowane metody z zakresu kolorowań, zwykle nie wymagały

wielu kreatywnych zmian w klasycznym dowodzie, aby uzyskać wynik. Jednakże pokazywały pewną wiedzę z literatury dotyczącej podjętej problematyki. Praca zawiera liczne edytorskie niedociągnięcia.

Zaprezentowana rozprawa przedstawia pewne oryginalne wyniki naukowe, które mogą być podstawą do nadania stopnia doktora. Jednakże prezentuje ona bardzo niski poziom edytorski. Należy też podkreślić, że zawiera niepoprawne oraz nieprecyzyjne definicje. Dowody w rozdziale 4 są spisane bardzo niestarannie. To może świadczyć o niewystarczającym poziomie kultury matematycznej kandydata, aby nadać stopień doktora.

### **Podsumowanie**

Uważam, że złożona rozprawa doktorska mgr Gabriela Jakóbczaka w obecnej formie nie spełnia niektórych wymagań stawianych pracom doktorskim. W związku z tym proponuję poprawę pracy przez kandydata.



(-) Katarzyna Rybarczyk-Krzywdzińska