



UNIwersYTET IM. A. MICKIEWICZA
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4
61-614 Poznań
<http://www.wmi.amu.edu.pl/>

ZAKŁAD MATEMATYKI DYSKRETNEJ
prof. UAM dr. hab. Katarzyna
Rybarczyk-Krzywdzińska
Telefon: (61) 829 5398
kryba@amu.edu.pl

Poznań, 08 marca 2024

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ PANA MGR GABRIELA JAKÓBCZAKA PT. GRAPH COLORING GAMES

Omówienie zawartości pracy wraz z jej oceną

Recenzja dotyczy poprawionej wersji pracy.

Recenzowana rozprawa doktorska, licząca 59 stron, składa się z abstraktu, streszczenia, jednego rozdziału wstępnego, trzech rozdziałów przedstawiających wyniki rozprawy, rozdziału podsumowującego oraz bibliografii, która obejmuje 31 pozycji.

Pierwszy, wstępny rozdział zaczyna się od rysu historycznego problemów związanych z kolorowaniem. W dalszej części wstępu jest omówiona struktura pracy. Opisana jest motywacja do rozważania podjętych w pracy problemów. Opisane są też wyniki innych autorów w tej tematyce oraz opisany związek tych rezultatów z tymi prezentowanymi w rozprawie. Ta część pracy stanowi sensowne wprowadzenie do problematyki pracy.

W drugim rozdziale zaprezentowane zostały definicje i pojęcia niezbędne do zrozumienia zagadnień omawianych w pracy.

Rozdział 3 dotyczy rozgrywanej wersji kolorowania większościowego (ang. majority coloring). W kolorowaniu większościowym każdy wierzchołek ma co najwyżej połowę sąsiadów we własnym kolorze. W wersji rozgrywanej Alicja chce pokolorować graf zgodnie z zasadami kolorowania większościowego a Bob chce doprowadzić do takiego kolorowania częściowego, którego

nie można rozszerzyć zgodnie z zasadami kolorowania większościowego. Minimalną liczbę kolorów gwarantującą wygraną Alicji nazywamy rozgrywaną większością liczbą chromatyczną. Główny wynik rozdziału pokazuje, że w przypadku kolorowania większościowego nie ma ogólnego ograniczenia na liczbę kolorów gwarantujących wygraną Alicji. Jest to ciekawy rezultat w kontekście faktu, że dla każdego grafu zawsze istnieje zwykłe większościowe kolorowanie dwoma kolorami. Kolejne wyniki dają pewne oszacowania na rozgrywaną większością liczbą chromatyczną. Przedstawione jest ogólne oszacowanie przez rozgrywaną liczbę kolorowania (ang. game coloring number), z którego wynikają pewne wnioski dotyczące większościowej liczby chromatycznej dla grafów planarnych i z ograniczonym rozrostem (ang. bounded expansion). Udowodniony jest też wynik dotyczący rozważanego parametru dla drzew. Techniki dowodowe nie wykorzystują zaawansowanej wiedzy ani z teorii gier ani nie wymagają głębokiej znajomości własności grafów. Do ich uzyskania potrzebna była jednak pewna kreatywność i zrozumienie niektórych aspektów rozpatrywanej gry. Niewątpliwie jest to najciekawszy fragment pracy. Wyniki przedstawione w tym rozdziale zostały opublikowane już w artykule (**B. Bosek, J. Grytczuk, G. Jakóbczak. Majority coloring game. Discrete Applied Mathematics vol 255 (2019), 15–20**) i prawie w całości się z nim pokrywają.

Czwarty rozdział skupia się na rozgrywanej spójnej liczbie chromatycznej. We wstępnej części znajdują się obserwacje dające pewne ograniczenia na wielkość rozpatrywanego parametru. Dowody obserwacji 4.2, 4.3, 4.4 są elementarne. Dowody obserwacji 4.6 i 4.8 bazują praktycznie w całości na dowodach analogicznych wyników dla niespójnej wersji gry, jednakże ich przywołanie świadczy o obeznaniu autora w literaturze tematu. Następny wynik dotyczy związku między liczbą kolorowania (ang. coloring number) w wersji gry bez i z założeniem o zachowaniu spójności. Kolejny wynik pokazuje związek między rozgrywaną spójną liczbą chromatyczną a liczbą 2-kolorowania (ang. 2-coloring number). W dowodzie zaadoptowana jest metoda z pracy [8] wykorzystująca metodę aktywacji wprowadzoną w [24]. Następnie podjęta jest dyskusja na temat porządku monetarnego też z [24], który implikuje pewne oszacowanie na rozrywaną spójną liczbę chromatyczną grafów planarnych. Wydaje się, że najistotniejszą częścią tego rozdziału są wyniki zawarte w kolejnych twierdzeniach 4.13–4.16. Pierwsze trzy dotyczą grafów zewnętrznie planarnych. W dowodzie oszacowań wykorzystano proste własności struktury grafów zewnętrznie planarnych. Ostatni wynik dotyczy grafów o liczbie kolorowania 4. Skonstruowana jest rodzina grafów o liczbie kolorowania 4, w której są zawarte grafy o dowolnie dużej rozgrywanej spójnej liczbie chromatycznej. Konstrukcja jest ciekawa i do jej stworzenia niezbędna była pewna pomysłowość, intuicja i zrozumienie problematyki rozgrywanych kolorowań grafów.

Podobne wyniki do tych z rozdziału 4 zostały opublikowane w [10] i [12]. We wstępie dość obszernie są opisane różnice i podobieństwa uzyskanych wyników z tymi z [10] i [12]. Można uznać, że wyniki zostały uzyskane niezależnie.

Praca kończy się podsumowującym rozdziałem, w którym omawiane są problemy otwarte związane z tematem.

Rozprawa jest zredagowana poprawnie od strony edytorskiej. Można mieć pewne uwagi do poziomu języka angielskiego oraz liczby literówek i małych błędów. Nie wpływa to jednak na ogólną merytoryczną ocenę pracy. Poniżej kilka przykładowych zaobserwowanych uchybień:

- str. 17, l. 14, słowa victory raczej nie używa się w kontekście gry na grafach;
- str. 18, l. 6, on Figure → in Figure;
- str. 34, l. -12, preprints for → preprints of;
- str. 35, l. 1, had a cardinality → had cardinality;
- str. 38, l.-2, beckward → backward.
- str. 43, l. 9, Proof of ~~the~~ Observation 4.11 is a slight modification of the proof of ~~the~~ Theorem 3...;
- str. 45, l. 3, corollary → Corollary;
- str. 46, vertex ~~a~~ lucky;
- str. 50, l. 9, has also been;
- str. 51, l -4, Hence ~~our~~ it is;
- str. 52, podpis pod Figure 14, made on two ways → made in two ways;
- str. 53, l. 2, G_k Next (brakuje kropki);
- str. 54, l. -10, even ff Alice → even if Alice;
- str. 54, l. -9, chosedn → chosen;
- str. 55. l. 13, be **the** number of colors;
- nadal nie mogę znaleźć odnośnika w tekście do Figure 14.

Reasumując, rozprawa doktorska mgr. Gabriela Jakóbczaka zawiera nowe wyniki, które stanowią oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. Wszystkie prezentowane istotne rezultaty są współautorskie z promotorami. Nie ma żadnych innych współautorów ani wyników uzyskanych samodzielnie, co może budzić wątpliwości co do wkładu samego autora w prace. Jednakże zakładam, że był on dość istotny. Wyniki z rozdziału 3 zostały opublikowane w uznanym czasopiśmie międzynarodowym. Wyniki z rozdziału 4 zostały przedstawione na konferencji, lecz nie zostały opublikowane, gdyż zanim zostały zredagowane, ukazała się praca z podobnymi rezultatami. Z jednej strony może to świadczyć na niekorzyść, a z drugiej świadczy o tym, że problemy podjęte w prezentowanej pracy doktorskiej są aktualne i wzbudzają zainteresowanie. Uzyskane wyniki z rozdziału 3 nie wymagają dużej wiedzy z zakresu kolorowań, teorii gier na grafach, teorii grafów. Opierają się głównie na pomysłowości. Dotyczy to też niektórych rezultatów prezentowanych w rozdziale 4. Te rezultaty z rozdziału 4, które wykorzystywały bardziej zaawansowane metody z zakresu kolorowań, zwykle nie wymagały wielu kreatywnych zmian w klasycznym dowodzie, aby uzyskać wynik. Jednakże pokazywały pewną wiedzę z literatury dotyczącej podjętej problematyki.

Podsumowanie

Uważam, że złożona rozprawa doktorska mgr. Gabriela Jakóbczaka spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie rozprawy doktorskiej mgr. Gabriela Jakóbczaka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.


(-) Katarzyna Rybarczyk-Krzywdzińska