Recenzja rozprawy habilitacyjnej dra Piotra Kota „Funkcja wewnętrzna "

Dr Piotr Kot urodził się pierwszego sierpnia 1971 roku w Jędrzejowie. W 1995 roku ukończył studia na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellonskiego uzyskując tytuł magistra matematyki, a w 1998 roku na tymże Wydziale uzyskał tytuł magistra informatyki. Stopień doktora nauk matematycznych uzyskał w 2003 roku na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellonskiego pod kierunkiem dra hab. P. Jakóbczaka. W latach 1998 – 2003 habilitant pracował jako asystent w Instytucie Matematyki Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki Politechniki Krakowskiej, a od 2004 roku jest zatrudniony w tymże Instytucie na stanowisku adiunkta.

Ocena rozprawy

Rozprawa habilitacyjna dra P. Kota składa z cyklu piecu prac opublikowanych w dobrych czasopismach: jednej – w Trans. AMS, dwóch - w Proc. AMS oraz dwóch w J. Convex Analysis. Jednak dziwi troche wybór trzeciego czasopisma, które będąc być może przyzwoitym tytułem ma profil odległy od zagadnień rozpatrywanych rozprawy. Prace te będę oznaczał ich jak [KR1]-[KR5], w odróżnieniu od dorobku poza rozprawą, który będę numerował jako [K1]-[K13]. (Habilitant korzysta z odnośników z tą samą numeracją zarówno dla rozprawy, jak i dla dorobku obok.)

Tytuł rozprawy jest nieco mylący. Rozprawa tak naprawdę dotyczy zachowania granicznego funkcji zespolonych wielu zmiennych w obszarach z dobrą geometrią. Podział dorobku na rozprawę i prace poza nią jest dość sztuczny. Na przykład, głównym zastosowaniem wyników pracy [KR1], zaliczanej do rozprawy, jest konstrukcja zbiorów wyjątkowych omawianych w dorobku poza rozprawą. Ponadto, techniki [KR1] stosują się w wielu pracach z całego dorobku. Praca [KR2] dotyczy konstrukcji funkcji wewnętrznej, ale istotną jej część stanowią zastosowania do badania problemu Radona, zaliczanego do dorobku poza rozprawą.

Omówienie rozprawy zacznę od przypomnienia definicji funkcji wewnętrznej. Funkcją wewnętrzną na obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ nazywa się ograniczoną funkcją holomorficzną na Ω taką, że „niestyczna" granica $f^*(\xi) := \lim_{z\to\xi, z\in\Omega} f(\xi), \xi \in \partial\Omega$, istnieje dla prawie wszystkich $\xi \in \partial\Omega$ oraz $|f^*(\xi)| = 1$ prawie wszędzie na $\partial\Omega$.(W większości przypadków niestyczne granice można zamienić na granice „promieniowe".)

Gdy $d = 1$, funkcje wewnętrzne stanowią podstawowe narzędzie w badaniu bardziej złożonych funkcji holomorficnych w kole jednostkowym (i ogólniejszych obszarach z $\mathbb{C}$.) Przypomnę tu tylko klasyczne twierdzenie o faktoryzacji funkcji z przestrzeni Hardy'ego. Z drugiej strony, w przypadku $d > 1$, samo istnienie funkcji wewnętrznej na na kuli jednostkowej B^d stało długo po dużym znakiem zapytania. Problem istnienia nietrywialnej funkcji wewnętrznej na B^d w $\mathbb{C}^d, d \geq 2$, został postawiony przez Rudina i Vitushkina pod koniec lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Wszystko wskazywało na to, że taka funkcja raczej nie istnieje ponieważ miałaby ona spełniać szereg dość wygórowanych warunków na zachowanie brzegowe (np. miałaby ona być nieciągła w każdym punkcie ∂B^d). W 1982 roku Lowowi i Aleksandrovi udało się skonstruować funkcję wewnętrzną na B^d dwoma zupełnie różnymi metodami. Nieco później Aleksandrov znalazł nową metodę konstruowania funkcji wewnętrznej jako pewnego szeregu z subtelnie dobranych wielomianów jednorodnych. Metoda Aleksandrova pozwoliła uzyskać funkcje wewnętrzne o specjalnej i dość wyrafinowanej strukturze, np. z rozrzedzonym widmem. Natomiast Low przeniósł swoje wyniki na ogólniejsze obszary $\mathbb{C}^d$, m.in. na obszary pseudowypukłe o brzegu klasy C^2, za pomocą technik holomorficznej funkcji podpierającej (nazywaną w rozprawie HFS). Funkcję wewnętrzną otrzymuje on jako rezultat pewnego procesu iteracyjnego „poprawiania" zachowania funkcji holomorficznej na brzegu, gdzie funkcja podpierająca odgrywa istotna rolę przy szacowaniu tych poprawek.(Warto podkreślić, że Low istotnie opierał się na metodach „poprawiania" funkcji holomorficznej wypracowanych nieco wcześniej przez Hakima i Siboniego, którzy pokazali jak skonstruować ograniczoną funkcję holomorficzną na B^d z modułem granic niestycznych pomiędzy 1/2 a 1.)

Dla ścisłości tej recenzji wprowadzimy następujące standardowe oznaczenia. Dla obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}^d$, przez $H^\infty(\Omega)$ oznaczmy przestrzeń funkcji holomorficznych i ograniczonych na Ω, a przez $A(\Omega)$– przestrzeń funkcji holomorficznych na Ω i ciągłych na $\overline{\Omega}$.

Żeby umiejscowić wyniki habilitanta w odpowiednim kontekście przytoczę jeden z głównych wyników Lowa. Niech Ω będzie obszarem ograniczonym, ostro pseudowypukłym z brzegiem klasy C^2. Wówczas dla każdej ograniczonej, ostro dodatniej oraz półciągłej z dołu funkcji h na $\partial\Omega$ i każdego $\epsilon > 0$ istnieją funkcje $f \in A(\Omega)$ i $g \in H^\infty(\Omega)$ takie, że $\sigma_{2n-1}\{z \in \partial\Omega : |f(z)| \neq h(z)\} < \epsilon$ oraz $|g^*(z)| = h(z)$ dla prawie każdego $z \in \partial\Omega$, gdzie σ_{2n-1} jest $(2n-1)$-miarową miarą Hausorffa na $\partial\Omega$ a g^* jest promieniową (lub niestyczną) wartością graniczną

g. Twierdzenia tego typu w bardziej ogólnych wersjach, z f i g posiadającymi dodatkowe własności geometryczne, i przy nieco słabszych założeniach na Ω są głównymi wynikami rozprawy. (Zauważmy, że Aleksandrov zaznacza na koniec swojej pracy w Funct Anal and Appl, 1984, że niektóre jej wyniki mogą być przeniesione nawet na ogólniejszy przypadek niż rozpatrywany u Lowa. Dotyczy to konstrukcji funkcji z $H^\infty(\Omega)$ i $A(\Omega)$ zachowujących się „dobrze" względem ustalonej miary na brzegu obszaru. Takie wyniki można znaleźć również w dorobku habilitanta.)

Habilitant łączy podejścia Lowa i Aleksandrova uzyskując nowe konstrukcję funkcji wewnętrznych w obszarach bliskich w pewnym sensie wypukłym z wystarczająco regularnym brzegiem. W szczególności, podstawową rolę w rozprawie odgrywają wielomiany jednorodne o specjalnych własnościach oraz zmodyfikowane pojęcie funkcji podpierającej. Otrzymane wyniki nie odbiegają jakościowo (ideowo, pomysłowo) od znanych rezultatów Aleksandrova i Lowa.

Habilitant wprowadza w [KR2] następującą definicję funkcji podpierającej. Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}^d$, a $S \subset \partial\Omega$ będzie zbiorem borelowskim. Wówczas funkcja $\Phi : \overline{\Omega} \times S \to \mathbb{C}$ nazywa się holomorficzną funkcją podpierającą (HFP) na zbiorze S jeśli $\Phi(\cdot, z) \in A(\Omega)$ dla każdego $z \in \partial\Omega$, zachodzą oszacowania: $\exp(-c_1\|z-w\|^2) \leq \Phi(z,w) \leq \exp(-c_2\|z-w\|^2)$ dla pewnych stałych c_1, c_2 i $(z,w) \in \partial\Omega \times S$, oraz $\sup_{(z,w)\in T\times S} |\Phi(z,w)| < 1$ dla każdego zwartego $T \subset \Omega$. Powiemy, że obszar Ω dopuszcza HFP na zbiorze S jeżeli istniej ciąg zbiorów borelowskich $\{S_i\}$ zawartych w $\partial\Omega$ takich, że $S = \cup_i S_i$ oraz Ω posiada HFP na S_i dla każdego i. Taka koncepcja funkcji podpierającej pozwala na degeneracje wypukłości obszaru Ω na pewnych podzbiorach jego brzegu. Tak jak u Lowa, wprowadzona w rozprawie HFP jest istotnym narzędziem w konstruowaniu dobrych przybliżeń funkcji na brzegu obszaru, a otrzymane za jej pomocą wyniki zawierają jeden z głównych wyników Lowa.

Drugim filarem, na którym opierają się techniki rozprawy, są własności wielomianów jednorodnych na obszarach w $\mathbb{C}^d$. Idea użycia wielomianów jednorodnych do konstrukcji funkcji o żądanym zachowaniu brzegowym należy do Rylla i Wojtaszczyka. Była rozwijana ona przez Aleksandrova, Bourgaina, Rudina i Wojtaszczyka w latach 80-ch minionego stulecia. Następujące twierdzenia habilitanta o rozdzielaniu i aproksymacji są podstawą dla wielu wyników z rozprawy a także z dorobku obok (i również ciekawe same w sobie). Mianowicie, habilitant pokazuje w [KR1], że istnieje ciąg $\{p_k\}$ wielomianów jednorodnych wspólnie ograniczonych na obszarze Ω, które dobrze rozdzielają zwarte i rozłączne podzbiory jego brzegu D i T w sensie, że $\sum_{k=Km}^{K(m+1)-1}|p_k(z)|^2 \geq 1/4, z \in T$, oraz $\sum_{k=Km}^{K(m+1)-1}|p_k(z)|^2 \leq 2^{-(Km)^{1-\epsilon}}, z \in D$, dla odpowiednio dużych m i ustalonego $\epsilon \in (0,1)$. (W rozprawie można znaleźć nieco ogólniejsza wersję tej własności.)

Inne bardzo pożyteczne twierdzenie uzyskane w rozprawie (w pracy [KR3]) pozwala dobrze przybliżyć ostro dodatnią funkcję ciągłą h na $\partial\Omega$ przez moduły wielomianów jednorodnych p_k. Mianowicie, dla każdego $c > 0$ istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $N \geq N_0$ oraz $m_i \in [N, 2N]$ można znaleźć wielomiany jednorodne p_{m_i} stopnia m_i spełniające $ch(z) < \max_i |p_i(z)| < h(z), z \in \partial\Omega$.

Przechodząc do omówienia głównych wyników habilitanta, załóżmy, że Ω jest ograniczonym obszarem z brzegiem klasy C^2, który dopuszcza HFP na zbiorze pełnej $(2d-1)$-miarowej miary Hausdorffa miary σ na $\partial\Omega$. Wówczas, jak wykazano w [KR2], dla każdej funkcji ostro dodatniej ciągłej funkcji h na $\partial\Omega$ istnieje $F \in H^\infty(\Omega)$ taka, że jej granice niestyczne F^* spełniają $F^*(z) = h(z)$ dla σ-prawie każdego $z \in \partial\Omega$. Wynik ten jest wnioskiem bardziej ogólnego twierdzenia o zachowaniu granicznym funkcji holomorficznych na Ω wzdłuż pewnych krzywych. Ponadto, jak habilitant dowodzi w [KR3], jeśli Ω jest ograniczonym, kołowym, ostro wypukłym obszarem z brzegiem klasy C^2, a h jest kołowo niezmiennicza: $h(z) = h(\lambda z), |\lambda| = 1, z \in \partial\Omega$, to oprócz $F^*(z) = h(z)$ dla prawie każdego $z \in \partial\Omega$ możemy zapewnić $\max_{|\lambda|<1}|F(\lambda z)| = h(z)$. (Tak skonstruowana F jest wewnętrzną również na cięciach kołowych.) Rozprawa zawiera też wersję ostatniego twierdzenia dla $A(\Omega)$, o której będzie mowa niżej.

Najciekawsze wyniki habilitanta dotyczą problematyki istnienia funkcji z przestrzeni $A(\Omega)$ z zadanym modułem wartości granicznych, które zawarte są w pracy [KR5]. Przypomnijmy, że funkcja wewnętrzna z $A(\Omega)$ musi być stalą. Zatem, żeby „interpolować" funkcję na brzegu Ω przez wartości graniczne elementów z $A(\Omega)$, musimy uogólnić pojęcie przyjmowania wartości granicznej (co jest dość naturalne i powszechne w wielu działach analizy). Tak w sposób naturalny powstaje problem wypracowania innego, bardziej wyrafinowanego podejścia do mierzenia wielkości wartości granicznych. Jednym z takich podejść jest zaproponowane przez habilitanta w [KR5] używanie norm całkowych, lokalnie uśredniających wartości brzegowe. Okazuje się, że takie podejście prowadzi do twierdzeń interpolacyjnych w $A(\Omega)$ całkiem analogicznych twierdzeniom interpolacyjnym w $H^\infty(\Omega)$ z dokładnością do zamiany odpowiednich pojęć. Zacznijmy jednak od twierdzenia otrzymanego na tej drodze dla funkcji z $H^\infty(\Omega)$. Niech Ω będzie ograniczonym, ostro wypukłym obszarem kołowym z brzegiem klasy C^2. Średnia wartość f na okręgu ze środkiem w punkcie $z \in \partial\Omega$ habilitant definiuje jako $\|f\|_z = \int_0^1 |f(e^{2\pi it})|^2\, dt$, $z \in \partial\Omega$. Wówczas jeśli h jest ostro dodatnią i ciągłą funkcją na $\partial\Omega$ z $\|h\|_z < \infty, z \in \partial\Omega$, oraz $g \in A(\Omega)$ spełnia $|g(z)| < h(z), z \in \partial\Omega$, to istnieje $f \in H^\infty(\Omega)$ z $\|h - |g + f^*|\|_z = 0$ dla $z \in \partial\Omega$, gdzie f^* jest granicą niestyczną f. Ponadto, można uczynić f dowolnie małą na zadanym zbiorze zwartym $F \subset \Omega$.

Jako pierwsze zastosowanie techniki uśredniania do badania funkcji z $A(\Omega)$, rozważmy zagadnienie interpolacji względem norm całkowych i ustalonej miary na brzegu Ω. Niech Ω będzie ograniczonym obszarem zbalansowanym posiadającym holomorficzną funkcję podpierająca na $\partial\Omega$, h będzie kołowo niezmienniczą ciągłą funkcją na $\partial\Omega$, a σ będzie miarą kołowo niezmienniczą borelowską na $\partial\Omega$. Wówczas dla każdej $g \in A(\Omega)$ z $\|g\|_z < \|h\|_z, z \in \partial\Omega$ i każdego $\epsilon \in (0,1)$ istnieje funkcja $f \in A(\Omega)$ taka, że $\|g + f\|_z \leq \|h\|_z$ dla $z \in \partial\Omega$ oraz $\sigma(\{z \in \partial\Omega : \|g + f\|_z < \|h\|_z\}) < \epsilon$. Twierdzenie to udaje się znacznie wzmocnić, gdy Ω jest obszarem ostro wypukłym z brzegiem klasy C^2. W tym przypadku, jak pokazano w rozprawie, dla każdej $g \in A(\Omega)$ oraz ciągłej funkcji h na $\partial\Omega$ takich, że $\|g\|_z \leq \|h\|_z, z \in \partial\Omega$, można znaleźć $f \in A(\Omega)$ taką, że $\|g + f\|_z = \|h\|_z, z \in \partial\Omega$. Dodatkowo można uczynić f dowolnie małą na zadanym zwartym zbiorze z Ω. Habilitacja zawiera ogólniejszą wersję tego ostatniego wyniku dla Ω dopuszczających HFP na $\partial\Omega$. (Zauważmy, że mimo to że elementy $A(\Omega)$ na brzegu Ω są stale, istnieje niestała $f \in A(\Omega)$ taka, że $\|f\|_z = 1, z \in \partial\Omega$.)

Praca [KR5] zawiera również następujący wynik o interpolacji w $A(\Omega)$ w konwencjonalnym sensie. Jest on podobny do wyniku powyżej o interpolacji względem miary σ z dokładnością do zastąpienia $\|\cdot\|_z$ przez zwykły moduł $|\cdot|$. Otóż, niech Ω będzie ograniczonym obszarem zbalansowanym posiadającym holomorficzną funkcję podpierająca na $\partial\Omega$, h będzie kołowo niezmienniczą ciągłą funkcją na $\partial\Omega$, a σ będzie miarą kołowo niezmienniczą borelowską na $\partial\Omega$. Wówczas dla każdej $g \in A(\Omega)$ z $|g| < |h|$ na $\partial\Omega$ i każdego $\epsilon \in (0,1)$ istnieje funkcja $f \in A(\Omega)$ taka, że $|g + f| \leq |h|$ na $\partial\Omega$ oraz $\sigma(\{z \in \partial\Omega : \max_{|\lambda|=1} |(g + f)(\lambda z)| < |h(z)|\}) < \epsilon$. (Jest to uogólnienie klasycznego wyniku Lowa, wskazanego na początku tej recenzji, na obszary o niższej regularności. Warunek kołowej niezmienniczości σ był pominięty w [KR5] i dodany w autoreferacie.)

Ponadto, jeżeli w tym przypadku h jest kołowo niezmiennicza, to, jak pokazano w [KR3], istnieje $f \in A(\Omega)$ dla której $|g| \leq h$ na $\partial\Omega$ oraz $\max_{|\lambda|=1} |(g + f)(\lambda z)| = h(z), z \in \partial\Omega$.

Badania własności teoriomiarowych zbiorów maksymalnych i zbiorów pikowych w $A(\Omega)$ stanowią istotna część rozprawy. Przypomnijmy, że dla $f \in A(\Omega)$ zbiór $K \subset \partial\Omega$ nazywa się maksymalnym zbiorem modułowym jeśli istnieje $f \in A(\Omega)$ taka, że $|f| = 1$ na K i $|f| < 1$ na $\overline{\Omega} \setminus K$. Dla $g = 0$ oraz $h = 1$, powyższe dwa twierdzenia podają konstrukcję maksymalnego zbioru modułowego w $A(\Omega)$. W drugim z nich zbiór ten posiada dodatkową własność geometryczną: przecina on dowolny okrąg o środku w zerze zawarty w brzegu obszaru Ω, co implikuje dodatniość jego $(2d-2)$-wymiarowej miary Hausdorffa. Maksymalne zbiory modułowe o dodatniej $(2d-1)$-wymiarowej mierze Hausdorffa zostały skonstruowane przez Lowa. Z drugiej strony nie posiadają one dodatkowych własności geometrycznych, np. związanych z przecinaniem okręgów zawartych w brzegu obszaru.

Szczególnie interesująca jest dokładniejsza wersja maksymalnego zbioru modułowego nazywana zbiorem szczytowym. Mianowicie, dla $f \in A(\Omega)$ zbiorem szczytowym nazywamy zbiór $\{\lambda \in \partial\Omega : |f(\lambda)| = 1\}$. Zbiory maksymalne (a razem z nimi i zbiory szczytowe) są dość małe w wyższych wymiarach w sensie topologicznym: jeżeli $d > 1$ to taki zbiór koniecznie ma puste wnętrze. Z drugiej strony, w sensie miarowym zbiory te mogą być duże: jak pokazał Henriksen dla każdego obszaru ściśle pseudowypukłego z gładkim brzegiem w $\mathbb{C}^d$ istnieje zbiór szczytowy o dodatniej mierze $(2d-1)$-miarowej miary Hausdorffa.

Za pomocą technik wielomianów jednorodnych, habilitant podaje w [KR4] alternatywną konstrukcję zbioru szczytowego o dodatniej $(2d-2)$-miarowej miarze Hausdorffa. Pokazuje on, że jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ jest zbalansowanym ograniczonym, silnie wypukłym obszarem z brzegiem klasy C^2, to wówczas istnieje zbiór szczytowy $K \subset \partial\Omega$ taki, że $\{\lambda K : |\lambda| = 1\} = \partial\Omega$. W szczególności, K przecina każdy okrąg o środku w zerze zawarty w $\partial\Omega$. Zatem K jest "kołowo" duży. Jest to słabszy wynik w porównaniu do twierdzenia Henricksena w sensie „wielkości" zbioru. Z drugiej strony, zbiór szczytowy konstruuje się w [KR4] dla większej klasy obszarów z brzegiem klasy C^2. Ponadto zbiór ten ma dodatkową własność geometryczną: przecina on każdy okrąg w $\partial\Omega$ o środku w zerze. Niestety, poza pewną informacją geometryczną, rezultaty habilitanta nie zawierają zbyt dużo informacji o strukturze zbiorów szczytowych i maksymalnych zbiorów modułowych. Jest to niewątpliwie ich mankamentem.

Wyniki rozprawy są zaawansowane technicznie i, moim zdaniem, stanowią interesujący material dla fachowców z teorii funkcji. Z drugiej strony, brakuje mi omówienia rezultatów habilitanta w odniesieniu do bliskich badań prowadzonych na przestrzeni ostatnich 20 lat. Muszę przyznać, że oprócz pierwszych prac Lowa i Aleksandrova, wspomnianych wyżej, nie potrafiłem znaleźć prac zawierających takie badania (za wyjątkiem książki Rudina, „New Constructions of Functions Holomorphic in the Unit Ball of $\mathbb{C}^N$", CBMS Ser, vol **63**, AMS, 1986, którą habilitant nie cytuje). Ale być może wyjaśnia się to mój brak rozeznania w dziedzinie rozprawy.

Wstępy prac wchodzących w rozprawę są dość zwięzłe i się powtarzają. (Mam wrażenie, że habilitant korzysta ze wstępu do pracy Lowa z 1984 roku.) Autoreferat czyta się dobrze, ale nie pozwala stworzyć kompletny obraz zawartości.

Ocena dorobku nie wchodzącego w skład rozprawy

Wydaje się, że dr Kot zalicza do dorobku naukowego też prace, które weszły w skład doktoratu. Z autoreferatu nie mogę wywnioskować, jakie dokładnie prace habilitanta mają podlegać ocenie merytorycznej. Rozprawa doktorska miała tytuł „Zbiory wyjątkowe", zatem a priori z rozprawą tą mogą być związane np. prace [K9] i [K10], gdzie rozpatruje się formalnie bliskie problemy. Przyjmuję jednak, że prace habilitanta opublikowane po 2003 roku stanowią dorobek po doktoracie, chociaż nie mam pewności czy tak rzeczywiście jest.

Dorobek habilitanta poza rozprawą habilitacyjna składa się z trzynastu prac. Jedna z nich ukazała się w Potential Analysis, dwie -w Canadian Math. Bull., jedna — w J. Convex Anal., trzy - w Bull. Belg. Math. Soc, trzy - w Czech Math. J., dwie - w Univ. Iagelon. Acta. Math., jedna- w Comput. Methods in Science and Technology. Z tych tytułów jedynie „Potential Analysis", moim zdaniem, jest dobrym czasopismem o zasięgu międzynarodowym. Reszta (za wyjątkiem ostatnich dwóch) to są czasopisma przyzwoite ale na pewno nie o wysokiej renomie. Zatem, z formalnego punktu widzenia, dorobek jest przyzwoity, ale nie wywierający dużego wrażenia.

Habilitant podzielił swój dorobek na trzy części: Problem Radona odtwarzania funkcji (tutaj habilitant podaje tylko tytuł ang. Radon Inversion Problem), Zbiory wyjątkowe i Zbiory pluripolarne. Omówienie dorobku zacznę od drugiej części gdyż jest ona tak na prawdę ścisłe związana z rozprawą. W szczególności habilitant stosuje techniki wielomianów jednorodnych rozwinięte w pracach stanowiących rozprawę, i krótko wspomniane powyżej.

Przede wszystkim na potrzeby tej recenzji wprowadzimy pojęcie zbioru (p,β)-wyjątkowego. Niech $E_{p,\beta}(f) = \{z \in \partial\Omega : \int_{|\lambda|<1} |f(\lambda z)|^p (1 - |\lambda|)^\beta dm_2(\lambda) = \infty\}$. Jeśli B^d jest kulą jednostkową w $\mathbb{C}^d$, a m_2 jest płaską miarą Lebesgue'a, to zbiór $E \subset \partial B^d$ nazywamy (p,β)-wyjątkowym dla funkcji holomorficznej f na B^d gdy $E = E_{p,\beta}(f)$. Cały szereg zaawansowanych technicznie wyników habilitanta dotyczy związków pomiędzy własnościami topologicznymi zbiorów $E \subset \partial B^d$, parametrami p i β powyżej, a istnieniem holomorficznej na B^d funkcji f takiej, że $E_{p,\beta}(f) = E$. Z osiągnięć habilitanta dotyczący zbiorów wyjątkowych, na uwagę, moim zdaniem, zasługują wyniki otrzymane w pracach [K4] i [K5]. W pierwszej z tych prac, przenosząc rozważania dla kuli na znacznie trudniejszy przypadek „wystarczająco regularnego" obszaru, habilitant bada zbiory wyjątkowe funkcji holomorficznej f na wypukłym zbalansowanym obszarze Ω o brzegu klasy C^1. Dla dowolnego zbioru kołowego typu G_δ i każdego $p > 0$ podaje on przykład funkcji holomorficznej na Ω takiej, że $E = \{z \in \partial\Omega : \int_{|\lambda|<1} |f(\lambda z)|^p \, dm_2(z) = \infty\}$. Z kolei, w [K5] (jedynej pracy z dorobku dotyczącej funkcji jednej zmiennej zespolonej), habilitant dla każdego zbioru typu G_δ i każdego $p > 0$ konstruuje funkcję holomorficzną na kole jednostkowym $\mathbb{D}$ taką, że $E = \{z \in \partial\mathbb{D} : \int_0^1 |f(zt)|^p \, dt = \infty\}$ i, jednocześnie, $\int_{\mathbb{D}\setminus[0,1]E} |f(z)|^p \, dm_2(z) < \infty$. Jest to dość elegancki wynik.

Cykl prac [K1-K3] dotyczy problemu typu Radona odtworzenia funkcji holomorficznej f na obszarze $\mathbb{C}^d$ na podstawie całek z tej funkcji po pewnej rodzinie podzbiorów Ω. (Habilitant bada też ten problem w pracy [KR2] należącej do rozprawy.) Rodzaj wyników, które habilitant otrzymuje na tej drodze dobrze ilustruje następujące twierdzenie. Załóżmy, że Ω jest ograniczonym, zbalansowanym i ściśle wypukłym obszarem $\mathbb{C}^d$ z brzegiem klasy C^2. Wówczas dla dowolnej dodatniej, półciągłej i kołowo niezmienniczej funkcji u na $\partial\Omega$, istnieje holomorficzna funkcja f na Ω, dla której $u(z) = \int_{|\lambda|<1} |f(\lambda z)|^p d\mu_2(\lambda)$ (więc tu znajdujemy funkcje f z zadanymi całkami po prawej stronie powyższej równości) Znacznie więcej informacji o problemie Radona habilitant uzyskuje w przypadku $\Omega = B_d$. W tej sytuacji dowodzi on kryterium rozwiązywalności problemu Radona formułowany za pomocą wielomianów jednorodnych. Habilitant rozważa również problem Radona w obszarze pseudowypuklym Ω z brzegiem klasy C^2 ustalając całki wzdłuż pewnej naturalnej rodziny krzywych $\gamma(z,t) \in \overline{\Omega}, (z,t) \in \partial\Omega \times [0,1]$, za pomocą funkcji u zdefiniowanej na brzegu tego obszaru. Okazuje się, że dla ustalonego $p > 0$ taki problem dopuszcza rozwiązanie f holomorficzne na Ω, dla którego $u(z) = \int_0^1 |f(\gamma(z,t))|^p \, dt$ dla prawie wszystkich $z \in \partial\Omega$. Ponadto, jako wniosek z konstrukcji takich rozwiązań, można podać efektywną konstrukcję rozwiązania problemu Dirichleta dla funkcji plurisubharmonicznych na obszarach pseudowypukłych, gwiaździstych względem zera z brzegiem klasy C^2. Jest to ciekawe zastosowanie. W [K1] można znaleźć również inne niebanalne zastosowania konstrukcji rozwiązań problemu Radona.

Na wyróżnienie zasługuję praca [K8] dotycząca struktury zbiorów (pełnych) pluripolarnych w $\mathbb{C}^d$, gdzie habilitant rozszerza klasę takich zbiorów rezygnując z części znanych założeń natury topologicznej. W szczególności, pokazano, że jeśli E jest typu G_δ oraz $E \subset F_1 \times ... F_d$, gdzie F_i sa zbiorami polarnymi w $\mathbb{C}$ to E jest zbiorem pluripolarnym. Ponadto, habilitant podaje konstrukcję funkcji plurisubharmonicznej takiej, że $E = \{z \in \mathbb{C}^d : u(z) = -\infty\}$. Jest to niestety jedyna praca habilitanta dotycząca zbiorów pluripolarnych.

Dane bibliometryczne

Według bazy Web of Science, prace dra P. Kota były cytowane 4 razy (nie licząc autocytowań). Jest to liczba zdecydowanie nieprzekonująca. Prace cytujące dorobek habilitanta opublikowane są w poważnych czasopismach i napisane są przez poważnych matematyków. Lecz cytowanie te służą raczej kompletności przeglądów literatury we wstępach, niż istotnie korzystają z wyników habilitanta. Z drugiej strony, tematyka badań habilitanta jest dość niszową, uprawianą w ostatnich latach przez bardzo wąskie grono osób. Może być to związane z ogólnym zanikiem zainteresowania teorią funkcji i innymi klasycznymi działami analizy. Zauważę, że niektórzy wiodący matematycy w analizie zespolonej mają zauważalną, ale niedużą liczbę cytowań, nieporównywalna z cytowaniami np. w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Więc, mimo ogólnie negatywnego oddźwięku, cytowania habilitanta muszą, moim zdaniem, być skorygowane o współczynnik aktywności w badaniach zachowania granicznego funkcji wielu zmiennych.

Działalność zawodowa

Aktywność naukowa dra Kota pozostawia wiele do życzenia. Habilitant nie uczestniczył w **żadnych** konferencjach międzynarodowych. Brał udział w trzech konferencjach Instytutu Matematyki Politechniki Krakowskiej. Odczyty wygłaszał tylko na Seminarium Analizy Zespolonej WMiI UJ w Krakowie. Zupełny brak kontaktu ze światem matematycznym na pewno odbija się w niskiej cytowalności habilitanta i wąskości obszaru badań. Ponadto dr Kot nie był uczestnikiem żadnego projektu naukowego.

Z autoreferatu wynika, że habilitant prowadził tylko zajęcia wyrównawcze. Zatem działalność dydaktyczna habilitanta budzi duży niedosyt. Z drugiej strony, dr Kot wypromował 19 magistrantów. Jedynie ten aspekt zaangażowania habilitanta w dydaktykę wygląda przyzwoicie.

Konkluzja

Rozprawa habilitacyjna dra Kota dotyczy trudnych i wartościowych problemów teorii funkcji wielu zmiennych zespolonych, a habilitant ma istotny dorobek naukowy. Dorobek ten stanowi, moim zdaniem, znaczącą dodaną wartość w zrozumienie zachowania granicznego funkcji zespolonych. Tematyka prac i warsztat habilitanta mogłyby być bardziej różnorodne. Techniki rozprawy choć skomplikowane i wymagające opierają się na rozwinięciu wypracowanych metod i narzędzi. Brak jest aktywności habilitanta zarówno w kontaktach naukowych, jak w prezentacji swoich wyników na zewnątrz. Skutkuje to nikłą rozpoznawalnością badań habilitanta przez fachowców. Ponadto, nie jest jasne, które prace dra Kota weszły w skład doktoratu. **Reasumujac, uważam, że mimo całego szeregu mankamentów, całość dorobku habilitanta jednak może być oceniona pozytywnie. Zatem wnoszę o dopuszczenie dra Kota do dalszych etapów postępowania o nadaniu stopnia doktora habilitowanego.**

16.08.2013 Yuri Tomilov/