UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA
Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4 61–614 Poznań

Tel: 61 829 53 08 Fax: 61 829 53 15 E-mail: wmi@amu.edu.pl

Poznań, 12 września 2023 r.

Recenzja rozprawy w przewodzie doktorskim mgr. Dimitriosa Vavitsasa pt. „Cyclic vectors in Dirichlet-type spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$"

Wektorem cyklicznym ograniczonego operatora liniowego T na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest wektor x, dla którego przestrzeń liniowa rozpięta na iteracjach tego operatora $T^n x$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ jest gęsta w przestrzeni $\mathcal{H}$. Jednym z powodów tego, że wektory cykliczne stały się obiektem badań matematyków zajmujących się teorią operatorów jest to, że są one związane ze sławnym i ciągle nierozwiązanym problemem Johna von Neumanna o istnieniu nietrywialnych podprzestrzeni niezmienniczych dla operatorów na przestrzeni Hilberta. Problem ten można sformułować za pomocą wektorów cyklicznych w następujący sposób: *Czy istnieje operator ograniczony na nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta, dla którego każdy niezerowy wektor w tej przestrzeni jest jego wektorem cyklicznym?*

Jednym z najlepiej zbadanych operatorów na przestrzeni Hilberta jest operator jednostronnego przesunięcia, czyli w przestrzeniach funkcyjnych operator mnożenia przez zmienną niezależną. V. I. Smirnov* i niezależnie A. Beurling** scharakteryzowali wektory cykliczne dla operatora mnożenia przez z na klasycznej przestrzeni Hardy'ego w kole jednostkowym $H^2(\mathbb{D})$. Wykazali oni, że funkcja jest wektorem cyklicznym dla operatora przesunięcia na tej przestrzeni wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona funkcją zewnętrzną.

Oprócz przestrzeni Hardy'ego klasycznymi przestrzeniami funkcji holomorficznych w kole jednostkowym $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ są przestrzenie Bergmana i Dirichleta. Wszystkie z wymienionych przestrzeni są szczególnymi przypadkami przestrzeni zwanych *przestrzeniami typu Dirichleta*. Przestrzeń typu Dirichleta $D_\alpha(\mathbb{D})$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ składa się z funkcji $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ holomorficznych w kole jednostkowym, dla których $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^\alpha |a_k| < \infty$.

Problem charakteryzacji wektorów cyklicznych w przestrzeniach $D_\alpha(\mathbb{D})$ był badany przez L. Browna i A. L. Shieldsa w pracy ([11]; numeracja z bibliografii rozprawy

* *Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques pròblemes qui s'y rattachent* (in French), Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **3** (1932), 338–372.

** *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space,* Acta Math. **81** (1948), 17.

doktorskiej), która ukazała się w roku 1984. Wykazali oni m.in., że wielomiany, które się nie zerują w kole jednostkowym są cykliczne (tzn. są wektorami cyklicznymi dla operatora mnożenia przez z) w przestrzeni $D_\alpha(\mathbb{D})$ dla każdego $\alpha \leq 1$. Okazało się, że nawet w przypadku, gdy $\alpha = 1$, nie udało się uzyskać pełnej chakteryzacji funkcji, które są wektorami cyklicznym w przestrzeni Dirichleta $D(\mathbb{D}) = D_1(\mathbb{D})$. Brown i Shields uzyskali jedynie warunek konieczny na cykliczność wykorzystując pojemność logarytmiczną zbioru zer granic radialnych. Do dziś nie wiadomo, czy ten warunek jest również warunkiem dostatecznym.

W przypadku funkcji holomorficznych wielu zmiennych naturalnymi dziedzinami, na które zostały uogólnione przestrzenie typu Dirichleta są polidysk i kula jednostkowa w przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Cykliczność w przypadku funkcji wielu zmiennych oznacza, że iteracje operatorów mnożenia przez zmienne niezależne (na danym wektorze) tworzą zbiór liniowo gęsty. W latach 2015–2019 dzięki badaniom takich matematyków jak C. Bénéteau, G. Knese, Ł. Kosiński, C. Liaw, D. Seco i A. Sola uzyskana została pełna charakteryzacja wielomianów cyklicznych na bidysku $D_\alpha(\mathbb{D}^2)$ w zależności od parametru α. Niedługo potem G. Knese, Ł. Kosiński, T. J. Ransford i A. Sola uogólnili ten wynik na przypadek przestrzeni anizotropowej $D_{\alpha_1,\alpha_2}(\mathbb{D}^2)$. Ciągle jest otwarty problem charakteryzacji cykliczności dla przestrzeni typu Dirichleta na polidysku $D_\alpha(\mathbb{D}^n)$, gdy $n \geq 3$.

Doktorant wraz ze swoim promotorem Ł. Kosińskim zajęli się problemem opisu wektorów cyklicznych w przestrzeniach typu Dirichleta na kuli jednostkowej w przestrzeni $\mathbb{C}^2$. W pracy [23] uzyskali kompletny wynik, podobny do rezultatów na bidysku. Aby go sformułować oznaczmy przez $\mathcal{Z}(p)$ zbiór zer wielomianu p, a przez $\mathbb{S} = \partial\mathbb{B}_2$ brzeg kuli jednostkowej. Główne twierdzenie z pracy [23] i zarazem najważniejszy wynik z rozprawy doktorskiej brzmi następująco:

Theorem A. *Niech $p \in \mathbb{C}[z,w]$ będzie wielomianem nieprzywiedlnym nieznikającym w kuli jednostkowej. Wówczas:*

(1) *Jeżeli $\alpha \leq 3/2$, to wielomian p jest cykliczny w przestrzeni $D_\alpha(\mathbb{B}_2)$.*

(2) *Jeżeli $3/2 < \alpha \leq 2$, to wielomian p jest cykliczny w $D_\alpha(\mathbb{B}_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{Z}(p) \cap \mathbb{S}_2$ jest zbiorem pustym lub skończonym.*

(3) *Jeżeli $\alpha > 2$, to wielomian p jest cykliczny w $D_\alpha(\mathbb{B}_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{Z}(p) \cap \mathbb{S}_2 = \emptyset$.*

Z kolei w pracy [37] doktorant badał problem cykliczności tzw. wielomianów modelowych w przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Są to wielomiany postaci:

$$\pi_m(z) = 1 - m^{m/2} z_1 \dots z_m, \quad \text{gdzie} \quad 1 \leq m \leq n.$$

Wykorzystując metody używane przez A. Solę w pracy [35] uogólnił Jego wynik dotyczący cykliczności wielomianów modelowych w przestrzeni $\mathbb{C}^2$. Uzyskany wynik ma postać:

Theorem B. *Wielomian $\pi_m(z) = 1 - m^{m/2} z_1 \dots z_m$ $(1 \leq m \leq n)$ jest cykliczny w przestrzeni $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \leq \frac{2n+1-m}{2}$.*

W pracy [35] D. Vavitsas badał również problem niecykliczności funkcji w przestrzeniach typu Dirichleta na kuli jednostkowej w przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Podobnie jak poprzednio, otrzymane twierdzenie jest uogólnieniem wyniku A. Soli z pracy [35] dla kuli w przestrzeni $\mathbb{C}^2$. Jest to następujące twierdzenie:

Theorem C. *Niech $\alpha \in (0, n]$ będzie ustalone i niech $f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$. Jeżeli dla α-pojemności Riesza zbioru zer wartości brzegowych $\mathcal{Z}(f^*)$ funkcji f zachodzi nierówność $\operatorname{cap}_\alpha(\mathcal{Z}(f^*)) > 0$, to funkcja f nie jest cykliczna w $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$.*

Rozprawa doktorska D. Vavitsasa dotyczy charakteryzacji wielomianów cyklicznych w przestrzeniach typu Dirichleta na kuli jednostkowej w przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Główne wyniki w niej zawarte zostały uprzednio wymienione. Są one opublikowane w pracach [23] i [37], które ukazały się w bieżącym roku w dobrych czasopismach.

Teraz bardzo krótko przedstawię jej treść. Recenzowana rozprawa doktorska składa się ze wstępu, w którym przedstawiony jest problem cykliczności w przestrzeniach typu Dirichleta, a następnie streszczenia zawierającego opis wyników uzyskanych przez doktoranta. Potem następuje kolejno jedenaście rozdziałów, z których pierwszy ma chakter wprowadzenia. Jest on dość obszerny, bo zawiera wszystkie niezbędne w dalszym ciągu definicje i twierdzenia. Rozdział drugi dotyczy zer wielomianów, które znajdują się na sferze jednostkowej. Ciekawe w nim są fakty odwołujące się do twierdzeń z teorii zbiorów semi-analitycznych. Rozdział trzeci dotyczy konstrukcji podprzestrzeni diagonalnych, które pozwalają wykorzystywać metody teorii funkcji jednej zmiennej w dysku do badania problemu cykliczności wielomianów. W rozdziale czwartym podane są warunki dostateczne na niecykliczność funkcji z przestrzeni $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ za pomocą transformacji Cauchy'ego i α-pojemności Riesza. Rozdział piąty zawiera twierdzenie podające warunki konieczne i dostateczne na cykliczność wielomianu, który nie zeruje się w kuli jednostkowej w przestrzeni $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$, jeżeli zbiór jego zer na brzegu kuli jest skończony. Rozdział szósty poświęcony jest badaniu cykliczności wielomianów za pomocą dylatacji radialnej w przestrzeni $D_\alpha(\mathbb{B}_2)$. Niezwykle krótki rozdział siódmy zawiera twierdzenie podające warunki na niecykliczność w przestrzeni $D_\alpha(\mathbb{B}_2)$ w przypadku wielomianu, który nie zeruje się w kuli jednostkowej i ma nieskończenie wiele zer na jej brzegu. Rozdział ósmy dotyczy zastosowania dylatacji radialnej do badania problemu cykliczności wielomianów modelowych w przestrzeni $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$. Rozdział dziewiąty poświęcony jest zastosowaniu dylatacji radialnej do badania cykliczności funkcji zewnętrznych w przestrzeni $D_\alpha(\mathbb{D})$. W rozdziale dziesiątym zastosowana jest metoda dylatacji radialnej do badania dowolnego wielomianu w przestrzeni $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$, który nie zeruje się w kuli jednostkowej. Wreszcie rozdział ostatni, jedenasty, przeznaczony jest na przedstawienie uwag i problemów otwartych.

Przejdę teraz do oceny rozprawy doktorskiej. Praca napisana jest zwięźle i poprawnie. Obszerna część wstępna ułatwia jej czytanie. Praca jest bardzo „techniczna", zawiera mnóstwo dość skomplikowanych wzorów. Pomimo to udało mi się znaleźć zaledwie kilka „literówek". Nie zauważyłem również żadnych błędów merytorycznych. Natomiast mam zastrzeżenia do strony redakcyjnej rozprawy. Jak widać z przytoczonego powyżej spisu rozdziałów jest ona podzielona na dużo bardzo drobnych, czasami liczących jedną lub dwie strony, części. To bardzo utrudnia czytanie tej rozprawy. Moim zdaniem ten podział na rozdziały jest zdecydowanie „za drobny". Byłoby lepiej dla Czytelnika, gdyby doktorant inaczej podzielił tę swoją pracę.

Niemniej jednak o stronie merytorycznej mam dobre zdanie. Tematyka pracy jest bardzo aktualna. Ostatnio zajmują się nią znani matematycy, specjaliści od analizy zespolonej. Praca doktorska Pana Vavitsasa doskonale wpisuje się w tę tematykę. Zawiera oryginalne rezultaty opublikowane w dobrych czasopismach. Uważam, że wyniki przedstawione w recenzowanej pracy są bardzo ciekawe i świadczą nie tylko o doskonałym opanowaniu „rzemiosła" przez ich Autora, ale również o Jego niewątpliwym talencie.

Biorąc powyższe pod uwagę, stwierdzam, że **zgodnie z Art. 187 pkt 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce rozprawa doktorska Pana mgr. Dimitriosa Vavitsasa stanowi „oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, oryginalne rozwiązanie w zakresie zastosowania wyników własnych badań naukowych w sferze gospodarczej lub społecznej albo oryginalne dokonanie artystyczne"** i wnoszę o dopuszczenie jej do publicznej obrony.

Andrzej Sołtysiak P-ń, 12.09.23

Dr hab. Andrzej Sołtysiak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu