

Recenzja rozprawy doktorskiej Michała Farnika „A hat guessing game”

Prof. dr hab. Andrzej Ruciński
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

1 Uwagi wstępne

Pierwszą wersję tej rozprawy zrecenzowałem w lutym 2017. Miałem wtedy sporo zastrzeżeń, w tym dwie zasadnicze: 1) brak wyraźnego wskazania autorstwa głównych wyników oraz 2) brak streszczenia w języku polskim. Jednak w podsumowaniu napisałem, że „Mimo powyższych uwag krytycznych, skłaniam się ku konkluzji, że przedłożona rozprawa spełni warunki stawiane rozprawom doktorskim przez art. 13 Ustawy, o ile tylko zostanie uzupełniona o streszczenie w języku polskim i o ile przynajmniej te najpoważniejsze błędy edytorskie (patrz uwagi 6, 9, 25, 30, 31, 33, 34) zostaną poprawione. Przy tym warunku, wnoszę o dopuszczenie Kandydata do dalszego toku przewodu doktorskiego.”

Obecna wersja uwzględnia moje ówczesne uwagi. Poniżej przedstawiam nową recenzję, która jednak w dużych fragmentach powiela, ale też modyfikuje, tekst tej poprzedniej.

2 Tematyka

Tematyka przedłożonej do recenzji rozprawy doktorskiej dra Michała Farnika leży na pograniczy teorii grafów i kombinatorycznej teorii gier. Punktem wyjścia jest popularna łamigłówka, „a hat guessing game”, zaproponowana przez Gardnera jeszcze w latach 60-tych ubiegłego stulecia. Od tego czasu pojawiło się wiele prac na jej temat podających częściowe rozwiązania zarówno

wersji oryginalnej, jak i licznych uogólnień i wariantów. Pragnę podkreślić, że wszystkie one miały charakter probabilistyczny, bowiem kolory kapeluszy były przydzielane losowo.

Natomiast w swojej rozprawie autor rozważa mniej popularny wariant, w którym to złośliwy adversarz, a nie przypadek, decyduje o kolorach kapeluszy. Celem gry nie jest zatem znalezienie strategii maksymalizującej prawdopodobieństwo wygranej, lecz wyznaczenie maksymalnej liczby kolorów $HG(G)$, przy której wciąż możliwa jest strategia wygrywająca dla graczy umieszczonych na wierzchołkach grafu „wzajemnej widzialności” G . Wariant ten został zaproponowany w pracy [BHKL] w roku 2008.

Główne wyniki rozprawy pochodzą z artykułu opublikowanego roku 2021 w *Discrete Mathematics*, którego Kandydat jest jednym z pięciu współautorów – wśród pozostałych są zarówno jego Promotor jak i Promotor Pomocniczy.

3 Wyniki

Przechodząc do wyników rozprawy, znajdujemy tu najpierw ogólne oszacowanie parametru $HG(G)$ postaci $O(\Delta(G))$. Zaprezentowane dowody (jeden oparty na metodzie kompresji wspartej trzema algorytmami, drugi na Lemacie Lovász), są dość wyrafinowane. Następnie, już w rozdziale 3, Doktorant pokazuje mocniejsze oszacowanie, przez tzw. liczbę kolorowania $col(G)$, ale tylko dla specjalnych strategii zwanych dwubiegunowymi.

Pozostałe wyniki rozdziału 3 dotyczą szacowania parametru $HG(G)$ dla szczególnych klas grafów. Najpierw autor ogranicza z góry liczbę $HG(T)$ przez 2 dla wszystkich drzew T . Tu jednak dowód jest bardzo elementarny. Kolejny podrozdział poświęcony jest klasie pełnych grafów dwudzielnych $K_{n,m}$. Modyfikując nieznacznie przykład zaczerpnięty z [BHKL], Kandydat dowodzi, że w tej klasie grafów parametr $HG(G)$ jest nieograniczony przez żadną stałą absolutną. Jednocześnie pokazuje oszacowanie $HG(K_{n,m}) \leq \min\{n, m\} + 1$. Ostatni podrozdział rozdziału 3 przynosi oszacowanie dolne $HG(B_{k,n}) \geq 2^k$, gdzie $B_{k,n}$ jest tzw. książką o $k + n$ wierzchołkach, przy czym n jest dostatecznie duże.

Rozdział 4 zawiera wyniki dotyczące uogólnienia gry, w którym każdy gracz może wskazać nie jeden, lecz s kolorów. Tutaj większość metod i dowodów przenosi się z przypadku $s = 1$, a otrzymane oszacowania ogólne są s razy większe, co nie jest niespodzianką. Natomiast w przypadku drzew i

dwudzielnym grafów pełnych wartości parametru $HG(s, G)$ rosną z s kwadratowo. W dalszej części rozdziału 4 pojawia się za to nowy wątek: techniczny lemat pozwala stosunkowo szybko wywnioskować oszacowania górne parametru $HG(s, G)$ dla grafów o dużym obwodzie, zanurzalnych w danej powierzchni.

Przedostatni rozdział, nieobecny w pierwotnej wersji rozprawy, przedstawia wybrane wyniki innych autorów dotyczące parametru $HG(G)$, które ukazały się już po złożeniu przez Kandydata rozprawy w 2016. Uzupełniają one lub czasem nawet poprawiają wyniki uzyskane przez Kandydata, co jednak w żadnym stopniu nie umniejsza wartości rozprawy. Przeciwnie, pokazuje raczej, że niszowa tematyka, którą zajął się Doktorant prawie 10 lat temu, zyskała na popularności. Dodam, że wśród badaczy zajmujących się tym zagadnieniem jest wybitny matematyk z Princeton, Noga Alon.

Ostatni rozdział zwięźle podsumowuje najważniejsze wyniki rozprawy i przedstawia problemy otwarte. Wśród tych ostatnich najbardziej interesujące wydaje się pytanie o najmniejszą stałą C , taką że dla wszystkich $s \geq 1$ zachodzi nierówność $HG(s, G) \leq Cs(\Delta(G) + 1)$, a także hipoteza, że dla grafów planarnych liczba $HG(s, G)$ jest oszacowana z góry przez funkcję parametru s .

4 Uwagi

Wszystkie (poza dwoma) uwagi krytyczne z poprzedniej wersji recenzji zostały przez Autora uwzględnione. Te dwa wyjątki są mało istotne, jak również jedyna nowa uwaga.

1. Notacja $HG(G)$ nie jest zbyt szczęśliwa. Rozumiem jednak, że Kandydat używa tu notacji, która już zadomowiła się w literaturze.
2. Strona 32, wiersz -3: 'the bound value' – lepiej 'the bounded value'
3. Strona 40, wiersz 3: „We will generalize the result ...” – nie wiadomo, o który wynik tu chodzi. Jeśli o poprzednie tw. 4.1, to nie jest to uogólnienie, ale wzmocnienie (choć tylko oszacowania, bo brak tu przecież algorytmu). Może jednak chodzi o tw. 2.4? Warto to sprecyzować.

5 Konkluzja

Wyniki naukowe zamieszczone w rozprawie doktorskiej dra Michała Farnika są oryginalne i stanowią wartościowy wkład w teorię grafów. Uważam, że przedłożona rozprawa spełnia warunki stawiane rozprawom doktorskim przez art. 13 Ustawy. Wnoszę o dopuszczenie Kandydata do dalszego toku przewodu doktorskiego.



Andrzej Ruciński

Poznań, 3 lipca 2023 r.