dr hab. Jakub Przybyło, prof. AGH
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Kraków, 6 czerwca 2023

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Bartłomieja Kielaka
Generalizations of Turán-type problems

Tematyka rozprawy mgra Kielaka dotyczy teorii grafów ekstremalnych, która jest jedną z podstawowych i szeroko badanych gałęzi kombinatoryki. Zagadnienia mieszczące się w tym nurcie mają często charakter optymalizacyjny, a typowe problemy dotyczą maksymalizacji lub minimalizacji jakiegoś parametru grafu, jak np. jego rozmiar, przy zadanych ograniczeniach, np. na jego rząd oraz strukturę. Grafy, dla których osiągane są wspomniane skrajne wartości badanego parametru określane są jako ekstremalne. Mimo że jej źródeł można doszukiwać się znacznie wcześniej, za bazowy wynik w tej tematyce można uznać rezultat Turána, który w 1941 roku wyznaczył maksymalną liczbę krawędzi grafu, który ma n wierzchołków, gdzie $n \in \mathbb{N}$, lecz nie zawiera podgrafu pełnego o dowolnie zadanym rzędzie. W nieco ogólniejszym ujęciu, zamiast podgrafu pełnego możemy zakazać dowolnego innego podgrafu H i badać maksymalną liczbę krawędzi (tj. rozmiar) grafu o zadanym rzędzie n przy założeniu, że nie zawiera on podgrafu izomorficznego z H. Wartości te nazywane są liczbami Turána grafu H i oznaczane $\mathrm{ex}(n, H)$. W analizowanej rozprawie rozważane są różne modyfikacje i warianty takich liczb.

Rozdział 1 pokrótce zarysowuje zawartość rozprawy. Rozdział 2 zawiera z kolei podstawowe oznaczenia i definicje oraz szereg twierdzeń i narzędzi wykorzystywanych w badaniach dotyczących teorii grafów ekstremalnych. W szczególności przytoczony jest lemat Szemerédiego o regularności oraz jego zastosowanie w dowodzie lematu 2.3, które zawiera drobne nieścisłości. Moje wątpliwości budzi też sformułowanie twierdzenia 2.5 – nie wydaje mi się ono poprawne, nie ma też podanego jego źródła. Szczegółowe uwagi formułuję na końcu recenzji. Doprecyzowanie i poprawa tych i jeszcze kilku drobnych niedociągnięć nie przedstawia jednak wyzwania i ogólnie rzecz biorąc cały ten wstępny rozdział jest dobrze przemyślany oraz stanowi zwięzłe, uporządkowane i niezbędne wprowadzenie do podjętej tematyki. Pewien niedosyt pozostawia zdawkowe przedstawienie pewnych aspektów dotyczących zastosowania algebr flagowych, w szczególności programowania półokreślonego i wykorzystywanych przy jego stosowaniu metod optymalizacyjnych. W gruncie rzeczy wyczerpujące opisanie tej obszernej tematyki w ramach rozdziału wstępnego rozprawy doktorskiej wydaje się jednak zadaniem karkołomnym. W połączeniu z faktem, iż nie jestem z wykształcenia informatykiem, nieco powierzchowne i fragmentaryczne potraktowanie tego tematu uniemożliwiło mi jednak dogłębne zapoznanie się z niektórymi aspektami omawianych wyników, bazujących na opracowaniu odpowiednich programów i szeregu kodów, wykorzystujących w szczególności oprogramowanie Flagmatic. Należy przy tym podkreślić powszechnie wiadomy fakt, iż jest to nierzadko podejście najefektywniejsze i implikujące najlepsze znane wyniki. Jego wykorzystanie w tej tematyce jest zatem naturalne, a wręcz wydaje się na chwilę obecną nieodzowne. W swojej dalszej analizie skupiam się jednak przede wszystkim na matematycznym aspekcie rozumowań i treści zaprezentowanych w rozprawie.

Rozdział 3 zawiera wyniki z artykułu mgra Kielaka opublikowanego wraz z Grzesikiem w Journal of Graph Theory. Głównym rezultatem ich rozważań jest twierdzenie 3.1, implikujące w szczególności asymptotyczną wartość (z dokładnością do wyrazów niższego rzędu) tzw. uogólnionych liczb Turána $\mathrm{ex}(n, C_k, C_{k-2})$ dla nieparzystych wartości $k \geqslant 7$, gdzie $\mathrm{ex}(n, C_k, C_{k-2})$ oznacza maksymalną liczbę cykli C_k w grafie rzędu n niezawierającym cykli C_{k-2}. Uważam, iż jest to ciekawy wynik, istotnie powiększający katalog par grafów, dla których określona została asymptotyka uogólnionych liczb Turána. Autorzy niezależnie wymyślili kluczowe elementy dowodu wspomnianego rezultatu, który wykorzystywał metodologię zastosowaną uprzednio przez Král'a Norina i Volca oraz pewne konsekwencje lematu Szemerédiego o regularności. Poza kilkoma bardzo drobnymi uwagami, nie mam wątpliwości co do poprawności przedstawionego rozumowania. Mam natomiast zastrzeżenia do precyzji opisu procesu losowego, na którym opierał się cały argument. Utrudniało to początkowo zrozumienie jego idei. Uwagi precyzuję na końcu recenzji.

W rozdziale 4 zaprezentowane zostały wyniki z nieopublikowanego artykułu, uzyskane wspólne z czterema innymi współautorami. Dotyczą one liczb Turána w środowisku grafów zorientowanych. W badaniach nad asymptotyką tychże kluczową rolę odgrywa parametr „compressibility", oznaczany przez $\tau(H)$ dla danego (zabronionego) grafu zorientowanego H. W istocie determinuje on zazwyczaj asymptotykę wartości liczb Turána $\mathrm{ex}_o(n, H)$, która jest interesująca jedynie dla acyklicznych grafów zorientowanych H. Jednym z istotniejszych wyników rozdziału jest twierdzenie 4.14, implikujące ograniczenie górne na $\tau(H)$, wyrażone jako niskiego stopnia wielomian niezmiennika $p(H)$, będącego naturalnym ograniczeniem dolnym na $\tau(H)$, dla zorientowanych grafów H o maksymalnym stopniu wyjścia nie większym niż 2. Dowód tego faktu opiera się na ciekawym i nietrywialnym zastosowaniu indukcji. Autor rozprawy miał także udział w uzyskaniu twierdzenia 4.19, które m.in. charakteryzuje pewne rodziny grafów zorientowanych, dla których $\tau(H)$ jest równe swemu ograniczeniu dolnemu – $p(H)$. Istnienie szerokiej gamy tego typu rodzin wynika także z twierdzenia 4.27, którego współautorem jest mgr Kielak. W dowodzie zręcznie upraszczana jest stopniowo struktura badanych digrafów w celu wykazania istnienia odpowiedniego homomorficznego zanurzenia. Wynik jest poprawny, mimo iż dowód jednej z kluczowych obserwacji, stwierdzenia 4.31, zawiera drobną usterkę. Konkretyzuję ją na końcu recenzji, wraz z innymi drobnymi uwagami, pomijając te mniej istotne.

Rozdział 5 poświęcony jest uogólnionym liczbom Turána w środowisku grafów zorientowanych i zawiera nieopublikowane wyniki mgra Kielaka, uzyskane wraz z czwórką współautorów. Zasadniczo cały rozdział skupiony jest wokół liczb $\mathrm{ex}_o(n, \overrightarrow{C_k}, \overrightarrow{C_l})$, tj. największej liczby cykli skierowanych $\overrightarrow{C_k}$ w n-wierzchołkowym grafie zorientowanym bez cykli $\overrightarrow{C_l}$. W przypadku gdy liczba k dzieli l, wyznaczony został rząd wielkości tej funkcji zmiennej n oraz dokładna asymptotyka dla $(k, l) = (3, 6)$. W przeciwnym wypadku, tj. gdy $k \nmid l$, określona została z kolei dokładna asymptotyka liczb $\mathrm{ex}_o(n, \overrightarrow{C_k}, \overrightarrow{C_l})$ dla $k \geqslant 6$ i dostatecznie dużych wartości l, przy założeniu, że $2 \nmid k$ lub $2 \mid l$, jak i dokładna wartość lub asymptotyka dla $k \in \{3, 4, 5\}$ i $l > k$. Wyniki te są oryginalne i ciekawe. Bazują m.in. na ponownej adaptacji metodologii zastosowanej uprzednio przez Král'a Norina i Volca oraz konsekwencjach lematu Szemerédiego o regularności, a w uzyskaniu wszystkich głównych tez zaprezentowanych w tym rozdziale miał udział autor rozprawy. Także w tym rozdziale można odnaleźć kilka usterek. Niektóre z nich precyzuję na końcu recenzji (pomijając kilka drobiazgów w stylu pomyłki w indeksach dolnych itp.).

Rozdział 6 zawiera wspomaganą komputerowo konstrukcję ciągu grafów, poprawiającą najlepsze znane ograniczenie na indukowalność ścieżki P_4, $i(P_4)$, parametru związanego z asymptotyką maksymalnej liczby indukowanych ścieżek P_4 w grafie. Głównym wkładem mgra Kielaka było zaprojektowanie i zaimplementowanie algorytmu optymalizacyjnego, rezultaty działania którego zostały wykorzystane we wspomnianej konstrukcji. Szkoda, że nie zostały przedstawione wyliczenia odnośnie otrzymanego ograniczenia, zwłaszcza że moje pobieżne rachunki wskazywały na nieco inną stałą niż ta podana w rozprawie, choć w istocie wciąż lepszą od uprzednio znanego najlepszego ograniczenia dolnego na $i(P_4)$.

Ostatni rozdział rozprawy zawiera treść artykułu opublikowanego wraz z Bożykiem i Grzesikiem w Discrete Mathematics, w którym autorzy wyznaczają wartości lub dosyć zbliżone do siebie ograniczenia dolne i górne na wspomniany parametr dla wszystkich grafów zorientowanych rzędu 4. Rozdział zawiera ciekawe zestawienie zróżnicowanych konstrukcji, deterministycznych jak i losowych, implikujących dobre ograniczenia dolne we wszystkich rozważanych przypadkach, w których uzyskaniu brał udział mgr Kielak. Ograniczenia górne otrzymywane były z kolei przede wszystkim przy użyciu wspomaganej komputerowo metody algebr flagowych, z pomocą pakietu Flagmatic. Jeden z nielicznych wyjątków dotyczy tu analizowanego grafu 24, dla którego autor rozprawy stworzył i zaprezentował klasyczny dowód ograniczenia górnego na indukowalność, bez użycia komputera.

Podsumowując, zgodnie z moją wiedzą, wyniki zaprezentowane w rozprawie mgra Kielaka stanowią rozwiązanie szeregu otwartych problemów naukowych i stanowią oryginalny i zauważony w środowisku naukowym wkład w rozwój teorii grafów ekstremalnych. Należy przy tym zaznaczyć, iż przedstawione rezultaty badań są dobrze osadzone w kontekście i historii prac naukowych prowadzonych w tej tematyce przez czołowych badaczy zajmujących się kombinatoryką. Szczególnie ciekawe wydają mi się twierdzenie 3.1, jak i np. szereg wyników tworzących rozdziały 5 i 7. Badania mgra Kielaka być może nie dostarczają jakichś nowych przełomowych narzędzi, czy metod dowodowych, co nie oznacza, iż brak w zaprezentowanych argumentach kreatywności i ciekawych nowych pomysłów. Wręcz przeciwnie, wspomniane wyniki są niebanalne, a do ich uzyskania wykorzystanych zostało szereg ciekawych i zaawansowanych narzędzi i metod. Nie mam też wiele uwag technicznych co do samej rozprawy, która jest napisana poprawnie. Pewne moje zastrzeżenia budzi jedynie jej lakoniczny styl i, oględnie rzecz ujmując, daleko idąca oszczędność w kwestii pomocnych komentarzy, objaśniających niektóre przejścia, co może być interpretowane zarówno jako wada, jak i zaleta. Biorąc jednak pod uwagę, iż spora część wyników mgra Kielaka nie została jeszcze opublikowana, uważna ich weryfikacja pozostaje po stronie recenzenta. Parę dodatkowych komentarzy mogłoby taką pracę znacznie ułatwić i przyspieszyć, nie wspominając już o tym, iż niektóre „skróty myślowe" pojawiające się w rozprawie prowadziły do utraty precyzji, czy nawet poprawności, co znajduje odzwierciedlenie m.in. w zamieszczonych poniżej uwagach szczegółowych. Mimo zauważalnej liczby drobnych usterek, nie zmniejszają one w istotny sposób mojej pozytywnej a nawet wysokiej oceny tematyki i zawartości recenzowanej rozprawy.

W moim przekonaniu przedstawiona rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim, a magistra Kielaka należy dopuścić do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

Uwagi szczegółowe :

1) W dowodzie lematu 2.3: w przedostatniej linijce zamiast „G' is H-free, as any copy of H in G' would induce a homomorphism $H \to R$" powinno się znaleźć stwierdzenie typu „there is no homomorphism $H \to G'$, as any such homomorphism would induce a homomorphism $H \to R$"; ponadto powinno być „$m > \frac{4}{\varepsilon}$" zamiast „$m > \frac{1}{4\varepsilon}$", oraz zamiast „Apply Theorem 2.4" powinno być „Apply Theorem 2.1".

2) Twierdzenie 2.5 w obecnej formie wydaje się nieprawdziwe. Być może trzeba dodać założenie odnośnie maksymalnego rzędu grafu H i uwzględnić ten parametr w oszacowaniu na C, podobnie jak w twierdzeniu 2.2. W przeciwnym razie kontrprzykład może być wygenerowany np. poprzez podstawienie za H odpowiednio długiego skierowanego cyklu parzystego $\overrightarrow{C_{2k}}$.

3) Opis procesu losowego analizowanego w dowodzie twierdzenia 3.1 można określić jako nieprecyzyjny lub niepełny. Szczególnie mylące jest stwierdzenie „Suppose we want to sample k vertices $w_0, \ldots, w_{k-1}$ so that $(w_i)_{i=0}^{k-1}$ is a good sequence." Sugeruje ono, iż nasz proces w istocie uwzględnia jedynie tzw. „good sequences", tzn. że każdy kolejny wylosowany wierzchołek, dołączony do uprzednio wylosowanych, musi tworzyć wraz z nimi prefiks jakiejś „good sequence". Wtedy jednak nieprawdą są dalsze wyjaśnienia odnośnie procesu: „We start with choosing w_0 at random from all vertices of G. Next, we pick any neighbor of w_0 to be w_1. In general, w_i is a random vertex from the set $A_i((w_i)_{i=0}^{i-1})$", gdyż nie mamy pewności, iż zawsze możemy wybrać dowolny element z podanych zbiorów wierzchołków. Ponadto, $w(D)$ wyraża wówczas jedynie oszacowanie dolne prawdopodobieństwa wylosowania ustalonego D, a ponieważ w tym procesie zawsze otrzymujemy jakąś „good sequence", te prawdopodobieństwa (dla wszystkich „good sequences") sumują się dokładnie do 1 i dalsze rozumowanie działa. Alternatywna interpretacja, przy której jednak wspomniane powyżej stwierdzenie „Suppose... is a good sequence." jest istotnie mylące, jest taka, że losujemy jedynie zgodnie ze zbiorami A_i, bez względu na to, czy nasze losowania „rozwijają się wzdłuż" jakiejś „good sequence" – wówczas w istocie $w(D)$ będzie postulowanym prawdopodobieństwem dla każdej „good sequence D", ale cały proces nie jest w pełni określony. Zakładam jednak, iż autor miał tę interpretację na myśli, przy założeniu, że w sytuacji, gdy jakiś zbiór A_i staje się pusty, wówczas przerywamy nasz proces i wynik interpretujemy tak, że nie udało się wygenerować żadnej (lub danej) „good sequence". Ponieważ taka sytuacja może potencjalnie wystąpić z niezerowym prawdopodobieństwem, uzasadnionym staje się stwierdzenie, iż „the sum of the weights of all good sequences is at most one". Analogiczna uwaga aplikuje się także np. do zastosowania podobnej metody w dowodzie stwierdzenia 5.9 w rozdziale 5.

4) Drobne uwagi do kńcówki dowodu stwierdzenia 3.2: w trzeciej linijce od końca „$d(w, v_i) = 2$ for $i = k-2, 0, 2$" nie jest prawdziwe dla $i = 0$ w przypadku, gdy $w \in C$; w drugiej linijce od końca, zamiast „$n_{1,2}$" powinno być „$n_{1,1}$".

5) Pod koniec strony 18 powinno być podkreślone, iż stwierdzenie „$p(H)$ can be equivalently defined as the smallest k for which there exists a homomorphism $H \to \overrightarrow{T}_k$" ma jedynie sens dla acyklicznych digrafów / grafów zorientowanych.

6) Nie jest oczywiste, dlaczego we wniosku 4.10 pojawia się „$\min(s, t)$", a nie np. „$\max(s, t)$"; ponadto w tym i poprzednim wniosku, H powinien mieć z założenia odpowiednią liczbę łuków, nie wierzchołków.

7) W dowodzie stwierdzenia 4.31, w przypadku digrafu T_c nie da się skorzystać ze stwierdzenia 4.30, gdyż podany wybór wierzchołków nie gwarantuje we wspomnianym przypadku spełnienia założeń stwierdzenia 4.30 (xy nie mógłby być zawarty w $\overrightarrow{C_3}$, co powoduje problem z przypadkiem $l = 3$). Żaden inny wybór też nie wydaje się odpowiedni. Na szczęście da się w tym przypadku bezpośrednio znaleźć problematyczne zanurzenie $Q_3 \to T_c$. Warto też przy tym zaznaczyć, iż w samo sformułowanie stwierdzenia 4.30 też wkradła się usterka – w trzeciej jego linijce, zamiast „w" powinno być „z".

8) Trzecie zdanie od końca dowodu twierdzenia 5.3 brzmi „By Lemma 2.6, we can remove all copies of $\overrightarrow{C_3}$ and $\overrightarrow{T_3}$ from G_0 by removing $o(n^2)$ arc". W rzeczywistości nie wynika to według mnie z samego lematu 2.6, lecz z jego dowodu (którego de facto nie ma w rozprawie).

9) W drugim akapicie dowodu twierdzenia 5.7 pada stwierdzenie „there exists a vertex which is contained in a copy of C_5, C_6, and C_9", które nie wydaje mi się oczywiste. Z pewnością istnieje natomiast wierzchołek zawarty w homomorficznych obrazach cykli C_5, C_6 i C_9, co jest wystarczające do dokończenia dowodu.

10) Teza stwierdzenia 5.14 powinna być wzmocniona (bez zasadniczej zmiany w dowodzie) i wskazywać nie tylko na brak Q_m, lecz także brak jego homomorficznego obrazu w G. To wydaje się potrzebne w dowodzie stwierdzenia 5.15, pod koniec pierwszego akapitu, w przypadku, gdy $w \in D$.

11) W drugim akapicie dowodu stwierdzenia 5.14, rozważania na temat przypadku $s \in \{1, 2\}$ nie mają sensu. Po pierwsze, $s = 1$ jest sprzeczne z założeniem, że s nie dzieli l. Po drugie, dla $s = 2$, mamy $s \leqslant m - 2 \leqslant d - 1$ i $s \mid k$, więc założenie, że $s \nmid l$ jest sprzeczne z definicją d.

12) W dowodzie ograniczenia górnego dla grafu 24, w rozdziale 7, należałoby doprecyzować dwie kwestie. Po pierwsze, lemat 7.3 implikuje jedynie, że niepołączone łukiem wierzchołki w zorientowanym grafie G mają takie same stopnie. Nie mówi on natomiast nic o implikacji odwrotnej, która także jest postulowana na podstawie tego lematu na początku dowodu wspomnianego ograniczenia. Po drugie, na początku dowodu stwierdzenia 7.4 przydałby się komentarz, dlaczego w ogóle możemy założyć, że dla każdego i (j), łuki między B_i (B_j) a B_m skierowane są w jedną stronę.

Jakub Przybyło