Wrocław, 20 III 2023 r.

Dr hab. Ryszard Deszcz
pracownik emerytowany
Katedry Zastosowań Matematyki
Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu

Recenzja Rozprawy doktorskiej Pana mgr. Rouzbeha Mohseniego
pt. *Integrability, Foliations and Twistors*

Promotorem *Rozprawy doktorskiej* Pana mgr. Rouzbeha Mohseniego jest Pan prof. dr hab. Robert Wolak, a promotorem pomocniczym Pani dr Aleksandra Borówka.

Pan mgr Rouzbeh Mohseni jest autorem oraz współautorem pięciu prac, w tym czterech cytowanych *Rozprawie*:
[24] T. Crepso, Z. Hajto, R. Mohseni, *Real Liouvillian extensions of partial differential fields*, SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl, 17 (2021), 095, 16 pages.
[MSC: 12H05, 37J35, 12D15, 14P05]
[34] Z. Hajto, R. Mohseni, *Tame topology and non-integrability of dynamical systems*, arXiv:2008.12074v1 [math.DS] 27 Aug 2020, 10 pages. [MSC: 37J30, 12H05, 70h07, 34C28]
[51] R. Mohseni, *Symmetries of Einstein-Weyl manifolds with boundary* Chebyshevskii Sb. 22, No. 2, (2021), 510–518. [MSC: 53C18, 53C28, 30F99]
[52] R. Mohseni, R.A. Wolak, *Twistor spaces on foliated manifolds*, Int. J. Math. 32, No. 8, (2021), 2150056, 22 pages. [MSC: 53C12, 53C28]
oraz pracy
R. Mohseni, R.A. Wolak, *Cohomology of Quaternionic Foliations and Orbifolds*, 21 pages. arXiv:2202.02733v2 [math.DG] 23 Nov 2022 (v1 6 Feb 2022, 14 pages). [MSC: 53C12, 53C28, 57R30]

Rozprawa doktorska Pana mgr. Rouzbeha Mohseniego liczy 91 stron. Trzy rozdziały główne *Rozprawy* poprzedzone są pięciostronicowym wstępem **Introduction** oraz ośmiostronicowym rozdziałem **Preliminaries**. Rozdziały te stanowią bardzo dobre wprowadzenie w tematykę *Rozprawy*.

W **Introduction** na str. 3 m.in. cytowana jest praca Pani dr Aleksandry Borówki [11]. Moim zdaniem warto w *Rozprawie* nadmienić, że wyniki pracy [11] stanowią część Jej pracy doktorskiej
[B] A. Borówka, *Twistor constructions of quaternionic manifolds and asymptotically hyperbolic Einstein-Weyl spaces*, PhD thesis. University of Bath. 2012, 131 pages.
https://purehost.bath.ac.uk/ws/portalfiles/portal/187938276/PhDFinalVersion.pdf
Np. na str. 8 *Rozprawy* można zacytować pewne wyniki z podrozdziałów 1.3.1 - 1.3.3 rozdziału 1.3 czy też ze str. 37 (Definition 22) pracy doktorskiej [B]. W szczególności, po Definition 4 (str. 8 *Rozprawy*) można przedstawić, powołując się na publikację [37] (Section 5, Examples) oraz pracę doktorską [B] (Section 1.3.2, str. 22), przykład 3-wymiarowej rozmaitości Einsteina-Weyla wyznaczonej przez 3-wymiarową sferę Bergera.

W kilku miejscach Rozdziału 2 (podrozdziały 2.1 i 2.2.1) *Rozprawy* można także zacytować pewne wyniki z pracy doktorskiej Pani dr Aleksandry Borówki.

W ostatniej części podrozdziału 1.1, dotyczącej samo-dualnego tensora Weyla W_+ i anty-samo-dualnego tensora Weyla W_-, można zacytować np. publikacje: [4] (Section 1) oraz C. LeBrun, *Einstein manifolds, self-dual Weyl curvature, and conformally Kähler geometry*, Math. Research Letters, 28 (2021), 127–144. arXiv: 1908.01881v2 [math.DG] 22 Sep 2019. Dodajmy, że w rozkładzie operatora krzywizny Riemanna R (linia 9_{13} *Rozprawy*) powinny znaleźć się wyrażenia: $W_+ + \frac{s}{12} I$ oraz $W_- + \frac{s}{12} I$.

Rozdział 2 *Rozprawy* **Twistor theory and foliation**. Główne wyniki tego rozdziału pochodzą z prac [51] i [52] (z wyjątkiem rozdziału 6 tej pracy). Znaczny fragment pierwszej części Rozdziału 2 *Rozprawy* (17_1–25^5), to praktycznie rzecz biorąc, praca [51] (511_2–517^4). Nadmieńmy, że w dowodach lematów 5 i 6 *Rozprawy* przedstawione są pewne diagramy przemienne, których nie ma w dowodach odpowiadających im lematach pracy [51] (Lemma 4, Lemma 5).

Najważniejszym wynikiem przedstawionym w tej części Rozdziału 2 *Rozprawy* jest Theorem 5 ([51], Theorem 4).

Niech $\mathcal{M}$ będzie rzeczywistą analityczną powierzchnią z konforemną koneksją Cartana i polem wektorowym Z (tj. symetrią danej koneksji Cartana, w sensie Definition 10, str. 19 *Rozprawy*). Ponadto niech wiązka wektorowa V (występująca w definicji koneksji Cartana, Definition 9, str. 18 Rozprawy) będzie wiązką stowarzyszoną wiązki stycznej $T\mathcal{M}$ i niech M będzie rozmaitością Einsteina-Weyla otrzymaną z $\mathcal{M}$ przez konstrukcję przedstawioną w pracy [11] (powierzchnia $\mathcal{M}$ jest brzegiem rozmaitości M). Wówczas na rozmaitości z brzegiem $M \cup \mathcal{M}$ istnieje pole wektorowe Y' takie, że $Y'|_{\mathcal{M}} = Z$ i pole $Y'|_{\mathcal{M}}$ jest symetrią struktury Einsteina-Weyla.

Z kolei najważniejszym wynikiem przedstawionym w drugiej części tego rozdziału *Rozprawy* jest Theorem 7 ([52], Theorem 5.5).

Niech (M^{2n}, g) będzie zorientowaną rozmaitością Riemanna wymiaru $2n$ z metryką g. Oznaczmy przez TM wiązkę styczną danej rozmaitości. Endomorfizm $J : TM \longrightarrow TM$ taki, że $J^2 = -Id$ zadaje strukturę prawie zespoloną na M. Ponadto niech $(M, g, \mathcal{F}, J)$ będzie sfoliowaną rozmaitością Riemanna z tensorem metrycznym g, foliacją $\mathcal{F}$ kowymiaru $m = 2q$ i wiązką normalną $Q = TM/T\mathcal{F}$ z rzutowaniem $\pi : TM \longrightarrow Q$. Rozkład wiązki stycznej $TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}^{\perp}$, przy identyfikacji $T\mathcal{F}^{\perp}$ z Q, daje nam metrykę g_Q na Q. Teraz możemy już zdefiniować transwersalną strukturę prawie zespoloną J^Q oraz transwersalną foliację prawie hermitowską i w konsekwecji sfoliowaną transwersalną rozmaitość prawie hermitowską $(M, g, \mathcal{F}, J^Q)$. W klasie sfoliowanych transwersalnych rozmaitości prawie hermitowskich $(M, g, \mathcal{F}, J^Q)$ możemy wyróżnić dwie podklasy: sfoliowane transwersalne rozmaitości prawie hermitowskie $(M, g, \mathcal{F}, J^Q)$ transwersalne $(1, 2)$-symplektyczne oraz sfoliowane transwersalne rozmaitości prawie hermitowskie $(M, g, \mathcal{F}, J^Q)$ transwersalne kosymplektyczne. W *Rozprawie* wykazano (Theorem 7), że jeśli $(M, g, \mathcal{F}, J^Q)$ i $(M', g', \mathcal{F}', J^{Q'})$ są sfoliowanymi transwersalnymi rozmaitościami prawie hermitowskimi, odpowiednio, transwersalną kosymplektyczną i transwersalną $(1, 2)$-symplektyczną, to każde transwersalne odwzorowanie holomorficzne $\phi : M \longrightarrow M'$ jest transwersalne harmoniczne.

Rozdział 3 *Rozprawy* **Orbifolds**. Orbifoldy są uogólnieniem pojęcia rozmaitości. W Rozdziale 3 *Rozprawy* przedstawione są rezultaty dotyczące orbifoldów gładkich (Definition 23; [52], Definition 6.1). Na każdym takim orbifoldzie istnieje gładka metryka riemannowska (Proposition 6, str. 48). Dodajmy, że jeśli $(M, \mathcal{F})$ jest q-wymiarową foliacją riemannowską, ze zwartymi liśćmi, to przestrzeń liści $M/\mathcal{F}$ dopuszcza naturalną strukturę q-wymiarowego orbifoldu (Proposition 7, str. 50). Pewne pojęcia wprowadzone w Rozdziale 2 *Rozprawy* można przenieść na orbifoldy. W szczególności, dla pewnych specjalnych odwzorowań $f : X \longrightarrow Y$ między orbifoldami riemannowskimi (X, g_X) i (Y, g_Y) można zdefiniować pojęcie odwzorowania harmonicznego (Definition 31; [52], Definition 6.2). Mamy też w tym rozdziale *Rozprawy* Theorem 12 ([52], Theorem 6.4) - odpowiednik Theorem 7 z Rozdziału 2 *Rozprawy*. Jeśli X i Y są orbifoldami prawie hermitowskimi, odpowiednio, kosymplektycznym i $(1,2)$-symplektycznym, to każde holomorficzne odwzorowanie orbifoldów $\phi : X \longrightarrow Y$ (spełniające warunki z Definition 25 *Rozprawy*) jest harmoniczne. W ostatniej części tego rozdziału przedstawione jest zastosowanie orbifoldów w teorii strun.

Na str. 48 *Rozprawy* powinno być wspomniane, że Definition 29, Definition 30 i Proposition 6 to odpowiednio Definition 50, Definition 51 i Proposition 52 z publikacji [12].

Na stronie 19 *Rozprawy* mamy Proposition 5, a na stronie 48 *Rozprawy* również Proposition 5. Analogiczne uwagi dotyczą: Proposition 6 (str. 21) i Proposition 6 (str. 48); Proposition 7 (str. 21) i Proposition 7 (str. 50) oraz Proposition 8 (str. 24) i Proposition 8 (str. 51).

W Rozdziale 4 *Rozprawy* **Integrability and real dynamical systems** przedstawione są pewne wyniki z prac [24] i [34]. Prace te dotyczą, odpowiednio, rozszerzeń rzeczywistych liouvillowskich rzeczywistych cząstkowych pól różniczkowych z rzeczywistym domkniętym ciałem stałych i teorii Galois dla cząstkowych układów różniczkowych [24] oraz całkowalności rzeczywistych układów dynamicznych [34]. W podrozdziałach 4.1.1–4.1.4 *Rozprawy* przedstawione są definicje dotyczące układów dynamicznych i różniczkowej teorii Galois, a w szczególności, w podrozdziale 4.1.4, trzy twierdzenia (Theorem 16, Theorem 17, Theorem 18) z pracy [34] (Theorem 2.1,4, Theorem 2.1.3, Theorem 2.1.5). W podrozdziale 4.1.5 przedstawione są wyniki z pracy [2] dotyczące całkowalności zespolonych planarnych pól wektorowych, a w kolejnym podrozdziale m.in. definicje z zakresu semi-analitycznej i semi-algebraicznej geometrii oraz o-minimalnych struktur. W podrozdziale 4.2 przedstawiony jest przykład niecałkowalnego gradientowego układu dynamicznego (Example 1; [34], Example 3.1.1). W ostatnim podrozdziale przedstawiona jest definicja rzeczywistej funkcji Liouville'a oraz przykład rzeczywistego układu dynamicznego, którego rozwiązaniami są rzeczywiste funkcje Liouville'a.

Moim zdaniem, przy definicjach, twierdzeniach, propozycjach i lematach zamieszczonych w *Rozprawie* i pochodzących z prac: [24], [34], [51] i [52], powinno być dodane, z której z wymienionych tu prac pochodzą te definicje, twierdzenia, propozycje i lematy.

Pan mgr Rouzbeh Mohseni opanował wiedzę i metody badawcze niezbędne do dalszego prowadzenia badań naukowych w matematyce. Jego *Rozprawa doktorska* zawiera wiele interesujących i ważnych wyników, zaliczanych do różnych działów matematyki: geometrii różniczkowej oraz układów dynamicznych i teorii ergodycznej, teorii ciał i wielomianów, geometrii algebraicznej i kilku innych działów. Wykazał się wiedzą i umiejętnościami upoważniającymi go do ubiegania się o stopień doktora nauk matematycznych w dyscyplinie naukowej Matematyka.

Stwierdzam, że recenzowana *Rozprawa doktorska* spełnia wymogi stawiane rozprawom doktorskim przez Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym. Wnioskuję o jej przyjęcie oraz dopuszczenie Pana mgr. Rouzbeha Mohseniego do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto wnioskuję o wyróżnienie *Rozprawy* doktorskiej Pana mgr. Rouzbeha Mohseniego.

Ryszard Deszcz

Uwagi

p. vii_{14} powinno być: We develop the theory

p. ix^2 proponuję napisać: Prof. Dr.

p. ix^5 proponuję napisać: Prof. Dr. hab. Zbigniew Hajto and Prof. Dr. Teresa Crespo

p. 2_6 i p. 12_{10} - proponuję napisać: $SO(2n)$.

p. 3^{10} powinno być: N.J. Hitchin p. 3_{13} powinno być: In Chapter 1

p. 4^{13} powinno być: by Atiyah

p. 7_{15} powinno być: of the tangent bundle

p. 8 **Definition 4.** proponuję napisać: $(M,[g])$ (p. 8_8) oraz $(M,[g],\mathcal{D})$ (p. 8_7)

p. 9_{14} powinno być: (1.2)

p. 10^{10} powinno być: $\det A = 1$

p. 13_8 proponuję napisać: $\Pi_g^{-1}(x)$.

p. 23; 23_{20}–23_{19} - proponuję napisać: (see (2.4))

p. 37^{11} proponuję napisać: J. Konderak

p. 43 **Proposition 4.** proponuję napisać: (i) zamiast *1.*, (ii) zamiast *2.* oraz (iii) zamiast *3.*; ewentualnie proponuję napisać w *Proof.* (**Proposition 4.**): *1.* zamiast (i), *2.* zamiast (ii) oraz *3.* zamiast (iii).

p. 61^1 proponuję napisać: $q_i = p_i = 0$

p. 62^{13} proponuję napisać: $\mathcal{L}(Y) =$

p. 62_{12} proponuję napisać: *is called the differential*

p. 73 [6] powinno być: C. R., Math., Acad. Sci. Paris 348, No. 23-24, 1323–1326 (2010).

p. 73 [11] powinno być: 224-241.

p. 74 [12] i [13] powinno być: Borzelino, J.E.,

p. 74 [14] i [16] powinno być: Burstall, F.E., Calderbank D.M.J.,

p. 74 [25], powinno być: Harvey, J.A., **261** (1985) 678–686; **274** (1986) 285-314.

p. 75 [34] powinno być: arXiv.2008.12074, 10 pp. [37] powinno być: 565–577.

p. 76 [44] powinno być: Mostowski, T., [45] powinno być: LeBrun,

[47] powinno być: Geometria

p. 77 [57] powinno być: 663–699. [61] powinno być: 345–366. [68] powinno być: 359–363.

Ryszard Deszcz