prof. Grzegorz Plebanek
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego
e-mail: GRZEGORZ.PLEBANEK@UWR.EDU.PL

1 września 2021 roku

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Artura Polańskiego

Izometryczne modele dla grup z metryką obustronnie niezmienniczą

Rozprawa Artura Polańskiego, przygotowana pod opieką dr. hab. Piotra Niemca, liczy 38 stron i w całości poświęcona jest dowodowi twierdzenia, które (w pewnym skrócie) brzmi następująco:

Twierdzenie. *Każda grupa topologiczna wyposażona w metrykę obustronnie niezmienniczą jest izometrycznie izomorficzna z grupą izometrii pewnej przestrzeni metrycznej.*

Jak pokaże poniższe pobieżne wyliczenie, główny rezultat rozprawy nawiązuje do całego szeregu wyników o reprezentacjach grup poprzez grupy izometrii.

- Gao i Kechris (2003) udowodnili że każda grupa polska jest izomorficzna z grupą izometrii pewnej przestrzeni metrycznej.
- Melleray (2008) pokazał, że zwarte grupy metryczne realizują się, z dokładnością do izomorfizmu, jako grupy izometri przestrzeni zwartych.
- Malicki i Solecki (2009) zaprezentowali analogiczny rezultat dla przestrzeni lokalnie zwartych,
- Niemiec (2013) przedstawił nowe, jednolite podejście do konstrukcji docelowej przestrzeni metrycznej, dowodząc na przykład, że każda grupa polska jest izomorficzna z grupą izometrii klasycznej przestrzeni Hilberta ℓ_2, wyposażonej w pewną metrykę.

W odróżnieniu od powyższych twierdzeń, rezultat recenzowanej rozprawy orzeka o istnieniu *izometrycznej* reprezentacji danej grupy. Z tego powodu w twierdzeniu Polańskiego pojawia się założenie, że wyjściowa grupa wyposażona jest w metrykę niezmienniczą ze względu na lewe i prawe przesunięcia (co jest w istocie warunkiem koniecznym dla istnienia omawianej reprezentacji).

Dowód Twierdzenia jest złożony i dlatego rozważa się najpierw przypadek, gdy dana grupa topologiczna jest ośrodkowa i wyposażona jest w metrykę ograniczoną. Następnie omawia się modyfikacje, pozwalające uwolnić się od tych dodatkowych założeń. Ośrodkowa wersja Twierdzenia jest przedmiotem samodzielnej publikacji autora w Topology and Its Applications (2021).

W swoim dowodzie Artur Polański wykorzystuje technikę ze wspomnianej powyżej pracy Niemca, która dla danej przestrzeni metrycznej X rozważa rozłączną sumę kopii X i jej skończonych potęg kartezjańskich. Technika ta ma tę zaletę, że podstawowe własności wyjściowej przestrzeni X przenoszą się na przestrzeń docelową. Poprzednie prace wykorzystywały na ogół bardziej abstrakcyjne podejście, związane z tak zwanymi funkcjami Katětova.

Konkretny przepis na docelową przestrzeń metryczną jest zaledwie początkiem dość złożonej drogi do dowodu Twierdzenia: musimy tę przestrzeń wyposażyć w metrykę o bardzo precyzyjnych własnościach, tak aby elementy naszej grupy były izometrycznie reprezentowane poprzez izometrie i jednocześnie, aby nie dopuścić do powstawania dodatkowych, niepożądanych izometrii. Dlatego nawet przypadek grupy ośrodkowej z metryką ograniczoną wymaga przeprowadzenia całego szeregu rozumowań ilościowych i topologicznych.

Pan Artur Polański prezentuje kolejne elementy dowodu swojego wyniku w podstawowym przypadku (przestrzeni ośrodkowej z ograniczoną metryką) w sposób dość precyzyjny i przekonywujący. Drobne uwagi:

— W dowodzie (c) Lematu 2 zapewne chodzi o funkcje $u_{n,k} : X \to X$.

— W Propozycji 1(b) pojawia się niezdefiniowany symbol $X^{ⓝ}$; zapewne ma to być zwykły iloczyn kartezjański X^n.

— W dowodzie Twierdzenia 7 równość ρ_{sup} i ν_{sup} nie jest wyjaśniona — zapewne wynika to z Propozycji 1(b), ale to stwierdzenie także pozostawione jest bez wyjaśnienia.

Kierując się pewną ekonomią, dalsze części pracy stawiają przed czytelnikiem spore wyzwania: pomocnicze fakty dowodzi się w przypadku ośrodkowym i ograniczonym, a następnie omawia się, czasami trochę lakonicznie, niezbędne zmiany potrzebne w kolejnych częściach dowodu (muszę przyznać, że formuła na X_* na dole strony 29 jest dla mnie zupełnie niejasna). Byłoby dużo łatwiej, gdyby we wstępie do pracy omówić ogólną ideę i mapę połączeń pomiędzy technicznymi lematami (nieco dokładniej niż to uczyniono we wstępie, a w stylu zaprezentowanym na stronie 9 w odniesieniu do Lematu 2).

Pisząc po polsku o matematyce wszyscy napotykamy na, czasami niespodziewane, przeszkody. Autor rozprawy nieźle poradził sobie z redakcją tekstu w języku ojczystym; niestety zupełnie niepotrzebnie zastosował dwie kalki z języka angielskiego. W pracy stosuje sie termin *propozycja*, na przykład **Propozycja 1** etc. co prowadzi do zbitek postaci *Poniższa propozycja jest odpowiednikiem Propozycji 2.2.*... Sądzę, że w języku polskim propozycja łączy się nierozerwalnie z proponowaniem czegoś, a nie faktem, który się stwierdza czy dowodzi. Podobnie jest z terminem *sekcja* — nie sądzę, aby w języku polskim stosowało się to słowo do nazwania części tekstu. Z drugiej strony autor swobodnie stosuje termin *iso-nice*, nie próbując go ani przetłumaczyć, ani omówić (jeśli termin izo-miły brzmi zbyt ryzykownie to zawsze można zastosować wybieg w stylu *grupa z własnością IN*).

W konkluzji niniejszej recenzji pragnę podkreślić, że omawiana rozprawa prezentuje wartościowy rezultat, który niechybnie zostanie dostrzeżony przez specjalistów. Jak widać z wyliczenia na pierwszej stronie recenzji, pokrewne zagadnienia były przedmiotem dociekań bardzo znanych matematyków. Pan Artur Polański twórczo rozwinął metodę wymyśloną przez swojego opiekuna naukowego i pokonał wiele technicznych trudności na drodze do swojego głównego twierdzenia. Dlatego z przekonaniem stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr. Artura Polańskiego przedstawia oryginalne rozwiązanie problemu naukowego i tym samym spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe środowiska matematycznego stawiane kandydatom do stopnia doktora; wnoszę o dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów przewodu.

P. Plebanek