UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Informatyki

Warszawa, 30 sierpnia 2022

Rada Dyscypliny Informatyka
Uniwersytet Jagielloński

Recenzja rozprawy doktorskiej Michała Seweryna
Dimension of posets with cover graphs in minor-closed classes

Przegląd wyników rozprawy. Tematem rozprawy są strukturalne własności zbiorów częściowo uporządkowanych (dalej: posetów), których graf pokrywający (ang. cover graph) jest rzadki (np. planarny czy z ustalonej klasy grafów zamkniętej na branie minorów).

Jednymi z najważniejszych niezmienników posetów jest wysokość (długość najdłuższego łańcucha) i wymiar (minimalna liczba liniowych rozszerzeń, których przecięcie daje dokładnie zadany poset). Te dwa niezmienniki pełnią funkcję analogiczną do liczby klikowej i liczby chromatycznej w świecie grafów nieskierowanych. Omawiana rozprawa doktorska wpisuje się w szeroki nurt badań, których celem jest opracowanie oszacowań na wymiar posetu w zależności od różnych założeń strukturalnych.

Naturalnym sposobem zadawania ograniczeń strukturalnych jest ograniczanie struktury grafu pokrywającego poset. W tym grafie skierowanym, wierzchołki odpowiadają elementom posetu, a krawędzie łączą wierzchołki (elementy) które są porównywalne, ale ich porównywalność nie wynika z przechodniości. Omawiana rozprawa doktorska skupia się na założeniu rzadkości grafu pokrywającego, w szczególności na założeniu, że graf ten należy do ustalonej klasy grafów zamkniętych na branie minorów (np. jest planarny).

Warto zaznaczyć, że ogólne zagadnienie z poprzedniego akapitu było badane w ostatnich latach przez kilka grup badawczych na świecie. Wyniki autora bardzo dobrze się wpisują w ostatni ciąg badań i mają duży potencjał uzyskać duże zainteresowanie w międzynarodowym środowisku.

W następnych kilku akapitach omówię dokładniej wyniki rozprawy.

Szerokość drzewowa 2. Pierwszy rozdział rozprawy poświęcony jest posetom, których

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 419
e-mail: m.pilipczuk@mimuw.edu.pl

graf pokrywający ma szerokość drzewową (ang. treewidth) co najwyżej 2. Jest to znana klasa grafów, której jedną z charakteryzacji jest bycie podgrafem pewnego grafu tzw. series-parallel. Autor, przy pomocy zręcznej i eleganckiej indukcji, dowodzi, że takie posety mają wymiar ograniczony przez 12, poprawiając poprzednie najlepsze znane ograniczenie 1276.

Grafy bez minora $K_{2,n}$. W drugim rozdziale, autor skupia się na grafach, które wykluczają biklikę $K_{2,n}$ jako minor (dla ustalonego n) i pokazuje, że mają one ograniczony wymiar (przez dość dużą funkcję parametru n).

Główną linią ataku jest częściowa charakteryzacja grafów bez minora $K_{2,n}$ autorstwa Dinga, pokazująca, że każdy taki graf da się zbudować (w ściśle określony sposób) z mniejszych grafów, należących do węższych klas grafów. Z dalekiej perspektywy, dowód głównego wyniku autora postępuje w sposób naturalny: dowodzi on (odpowiednio wzmocnionej) bazy indukcyjnej dla bazowych klas grafów z dekompozycji Dinga, po czym dowodzi ograniczenia na wymiar dla grafów otrzymanych w wyniku kroku konstrukcynego z dekompozycji Dinga. Choć brzmi to naturalnie, by przeprowadzić ten dowód, należy rozwiązać wiele technicznych problemów i dobrze zrozumieć, jak użyte w dekompozycji Dinga sklejanie grafów wpływa na wymiar. Autor wykazał się dużą sprawnością w takiej analizie i w operowaniu znanymi narzędziami z teorii wymiaru posetów.

Grafy bez drabin. Drabina to krata o wymiarach $2 \times n$. W trzecim rozdziale rozprawy autor skupia się na posetach o grafie pokrywającym wykluczającym ustaloną drabinę jako minor. Podobnie jak w poprzednim rozdziale, głównym wynikiem jest ograniczenie na wymiar takiego posetu (jako funkcja parametru n).

Przeciwnie do poprzedniego rozdziału, dowód tutaj ma bardzo elegancki i trikowy charakter. Głównym pomysłem jest zdefiniowanie niezmiennika strukturalnego, podobnego do głębokości drzewowej (ang. treedepth) który będzie związany z wielkością największej drabiny jako minor, podobnie jak głębokość drzewowa jest związana z długością najdłuższej ścieżki w grafie. Zdefiniowany niezmiennik okazuje się być zaskakująco prosty i mieć naturalną definicję rekurencyjną. Przy pomocy tej definicji jako osi indukcji, dowód ograniczenia na wymiar jest już stosunkowo prosty.

Grafy k-zewnętrznie planarne. Ostatni (i najdłuższy) rozdział rozprawy poświęcony jest posetom, których grafy pokryć są k-zewnętrznie planarne. (Tj., są planarne i posiadają rysunek na płaszczyźnie, który można całkowicie wymazać przy pomocy k kroków, gdzie w jednym kroku usuwamy wszystkie wierzchołki leżące na zewnętrznej ścianie i incydentne z nimi krawędzie.) Głównym wynikiem jest ograniczenie $\mathcal{O}(k^3)$ na wymiar takiego posetu. Bezpośrednim wnioskiem jest ograniczenie $\mathcal{O}(h^3)$ na wymiar posetu o wysokości h i planarnym grafie pokrywającym, poprawiające poprzednie ograniczenie $\mathcal{O}(h^6)$.

Dowód głównego wyniku jest wieloczęściowy:

1. Wpierw, przy pomocy znanych metod, sprowadzamy do przypadku, gdzie szukane liniowe porządki (z definicji wymiaru) muszą tylko pokryć nieporównywalne pary

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 419
e-mail: m.pilipczuk@mimuw.edu.pl

między minimalnymi i maksymalnymi elementami k-zewnętrznie planarnego posetu. Dodatkowo, przy pomocy techniki rozwijania, możemy dołożyć pewne założenie dotyczące porównywalności niektórych par.

2. Następnie wykorzystujemy założenie k-zewnętrznej planarności by dołożyć jeszcze jedno założenie: istnieje minimalny element x_0 i maksymalny y_0, *leżące na zewnętrznej ścianie*, że każda para (a, b), którą musimy pokryć, spełnia $x_0 \leq b$ i $a \leq y_0$. Dla każdej takiej pary (a, b), łączymy a z y_0 i x_0 z b ścieżkami dowodzącymi $a \leq y_0$ i $x_0 \leq b$, które to możemy wybrać tak, by w sumie dawały drzewa S i T ukorzenione w y_0 i x_0.
3. Przy pomocy znanego wyniku Kozika, Micka i Trottera, wystarczy wykazać, że w danym zbiorze par do pokrycia nie ma *standardowego przykładu* (pewnej ustalonej struktury) wielkości ck dla pewnej dużej stałej c.
4. Przy pomocy drzew S i T dowodzimy, że jeśliby taki przykład istniał, to graf nie może być k-zewnętrznie planarny, bo zawiera ciąg zagnieżdzonych cykli długości większej niż k. Ten ostatni punkt jest technicznym i długim dowodem, stopniowo odkrywającym kolejne strukturalne własności, jak taki standardowy przykład musiałby wyglądać względem drzew S i T. Dowód ten bardzo mocno bazuje na planarności i topologicznych argumentach.

W tym rozdziale, autor posługuje się z dużą zręcznością zarówno różnymi narzędziami do ograniczania wymiaru (w pierwszych dwóch punktach) jak i argumentami topologicznymi (w ostatnim punkcie).

Ocena i podsumowanie. W moim odczuciu, rozprawa wyróżnia się bardzo spójnym doborem zawartości — wszystkie cztery wyniki są na ten sam temat, mocno ze sobą powiązane, drążące ten sam kierunek badań — jak i bardzo wysokim poziomem samodzielności autora — pierwsze dwa wyniki są samodzielne, a ostatni wspólnie z doktorantem z Berlina. Co więcej, jakość opisu i prezentacji jest na bardzo wysokim poziomie.

Rozprawa zawiera wyniki ciekawe dla międzynarodowej społeczności, odpowiadające na bieżące pytania w dziedzinie. Autor pokazał dużą zręczność w operowaniu istniejącymi technikami w dziedzinie jak i w analizie kombinatorycznych obiektów w poruszanych zagadnieniach.

Podsumowując, uważam, że przedstawiona rozprawa jest bardzo dobrą rozprawą i z dużym marginesem błędu spełnia wymogi ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim w dziedzinie. Wnioskuję o przepuszczenie jej do dalszych etapów procedury. Ponadto, ze względu na bardzo duży stopień samodzielności przedstawionych prac i wysoką jakość wyników i ich prezentacji, wnioskuję o wyróżnienie rozprawy.

Z poważaniem,

Marcin Pilipczuk

Marcin Pilipczuk

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 419
e-mail: m.pilipczuk@mimuw.edu.pl